图 论 导 引

李修睦著

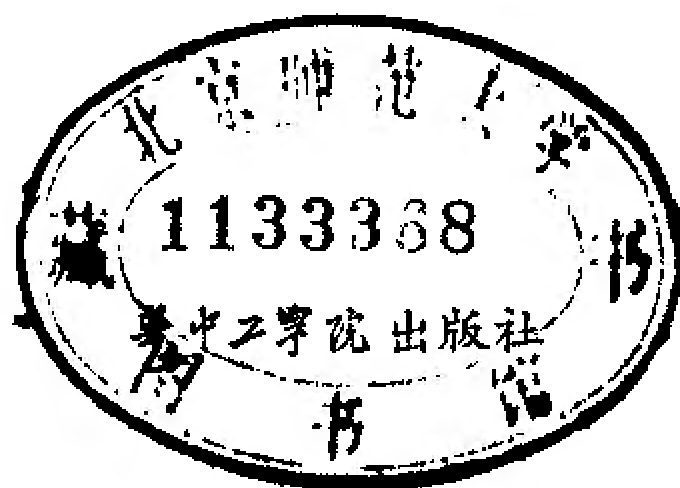


图 论 导 引

李修睦 著

责任编辑　彭守权

华中工学院出版社出版

（武昌喻家山）

湖北省新华书店发行　　各地新华书店经售

武汉市江汉印刷厂印刷

开本：850×1168 1/32　印张：13.125　字数：331,000

1982年12月第1版　1982年12月第1次印刷

印数：1—10,000

统一书号：13255—002　定价：2.[illegible]0元

内 容 简 介

本书共分十四章，前五章叙述图的一般概念与一般性质，后九章可以说是一些专门问题的讨论。本书语言通俗易懂，编排由浅入深，既可作为高等院校数学专业高年级图论选修课和研究生学习的教材，也很适宜为已学过普通高等代数知识的初学者自学图论的读本。书的每章都附有难易程度不同的较多的习题，供教学时选用。书中还介绍了一些最重要最新的成果，提出了若干有启发性的研究课题，引录了一定数量的有价值的中外文参考文献，为图论的深入研究指出了方向。

目　录

前　　言

由于计算机的出现，图论获得了迅速的发展。近十几年来，图论逐渐受到国内学者的重视，从事图论研究的人日益增多，不少院校增设了图论课程。流行的图论书籍目前已有好几种，但对于数学专业至今似乎还没有合适的教材。国外的几本书，有的内容过于艰深，有的内容已经陈旧，有的内容过于简单，均不适于作教材之用。为了适应目前开设图论课程的需要，既照顾到教学的要求，能由浅入深，循序渐进，又照顾到学科的发展，介绍新成果及新动向，以指明今后研究的方向，使学生在学习完毕之后能打下进一步研究文献、开展科学研究工作的基础，作者编写了《图论导引》这本书。称为"导引"，就是把它作为一本入门书的意思。正因此，本书也很适宜作自学教材。作者希望用较通俗的语言写这样的书，使图论这门学科能走出科学院与高等院校，到广大的数学爱好者和实际科技工作者中间去，让这门学科在我们国家应用更广，扎根更深，能更好地得到茁壮发展，较快地赶上或超过世界先进水平。

全书共分十四章，前五章叙述了图的一般概念与性质，其第一章是基本概念，介绍了研究图论时所遇到的最基本的一些名词术语，也初步显示了图论中的论证方法。这是全书的基础。其后各章是分别论述各个专题，介绍了在各专题方面的一些最重要的成果，也有些是最新的成果，还有的则指出了进一步研究的方向。在章节顺序的编排上，也有一定的理论联系。

每章后面均附有难易程度不同的较多的习题，供教学时选用。习题中一部分是巩固性的，一部分是发展性的，为了掌握图论的研究方法，作一定数量的习题是十分必要的，特别是有些图论的研究方向，可以由习题中进一步引伸出去。

图论的研究，时至今日其内容已相当庞大，在一本书内综述其所有方面是不可能的。加之作者学识浅陋，在编写过程中对内容虽经反复推敲与修改，但错误与遗漏之处在所难免，极望读者不吝赐玉提出宝贵意见。又书名叫做导引，能不能起到导引的作用，也望读者提出意见，有机会时，作者一定乐于吸取大家提出的意见，修改补充，让这本书在群众的帮助下得到改进，也让本书的作者有幸在群众的帮助下得到提高，特此预致谢意。

本书的初稿经华中师范学院数学系毛经中同志试教后，提出了很多很宝贵的意见，配备了很多有价值的习题，并积极协助本书的出版，在此表示诚挚的谢意！同时，本书的出版还得到彭守权、代志松以及华中工学院出版社的同志们大力帮助，在此也一并致谢！

作者

一九八二年元月于武汉

第一章　基本概念

§1　图

什么是图？这是首先要加以说明的。客观世界里若干事物（有限或无限）或社会上若干现象，事物与事物之间，现象与现象之间，或事物与现象之间有某种联系。我们要研究这些联系，从中找出规律，这就是所谓图论的研究内容。那么，什么是图呢？用点表示事物或现象，若事物之间、现象之间或事物与现象之间有某种联系，便用一条线把它们联系起来。这样便形成一个图，表示所要研究的对象及其内在的联系。下面举几个例来说明这个问题。

例1　七桥问题　可以说这是一个最古老的例。哥尼斯堡（Königsberg，现在叫加里宁格勒）有一条河，河中有一个岛，共建七座桥联系被河隔开的四块陆地（见图1.1）。当时这个城里的人希望能做一次散步，从一点出发，经过每座桥一次且仅一次，再回到原出发点。很多人不断探索，但都未能成功，便去请教当时的大数学家尤拉（Euler）。尤拉的回答（1736）是否定的，认为那样的要求是办不到的。为什么？这个问题可以转化为一个图论问题。首先将四块陆地表成四个点，各块陆地之间有桥相联的，便将那两点之间联一条线。这样便画出一个图（如图1.2)代表原来的四块陆地用桥相联的情况。想想为什么尤拉说这是不可能的呢？

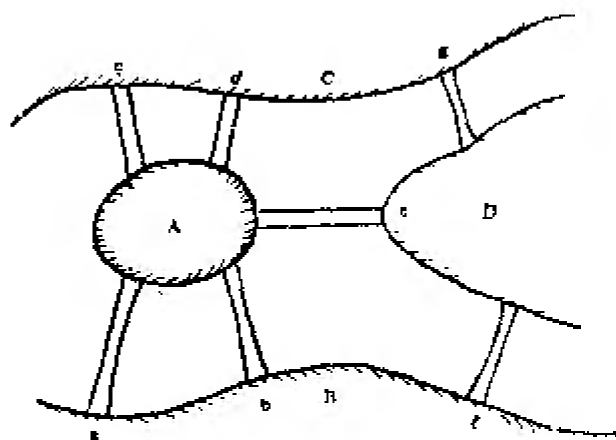


图　1.1

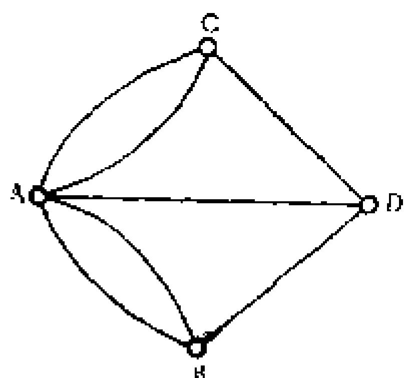


图 1.2

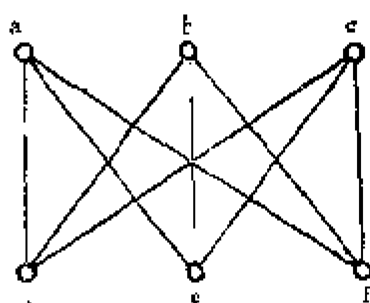


图 1.3

例2 水电供应问题 有一户人家接受水、电、煤气供应，用管道输送。若将人家与水、电、煤气厂用点表示，管道用线表示，便可画出如图1.3那样的图。

例3 循环球赛 设有六个球队进行循环比赛，每个队都有胜有负。如何把这场比赛简单地表示出来？用六点表示六个球队，两队比赛、一胜一负，我们便用一条带箭头的线，从胜队引向负队。这也是一个图（叫做**有向图**，见后），这场比赛便全部用这个图表示出来了（这叫做**竞赛图**，见图1.4）。

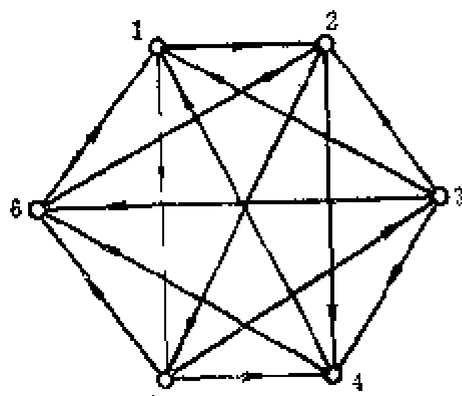


图 1.4

§2 有向图与无向图

一般地讲，在某一情况下，两个事物或两种现象其间的联系是带有倾向性的。画出图来，线上再加上箭头表示这些倾向性，这样的图叫做**有向图**，如上节的图1.4。下面的图1.5(二)也是有向图。图1.2、图1.3和图1.5里的(一)与(二)都是无向的。假使把图1.5(二)的顶O看成一棵树的根，带箭头的线表示这棵树向上生长的枝桠，或者把线上的箭头表示父子关系，对一个家族画出图来便是这样的图。在一个图里，线都不带方向的叫做**无向图**。

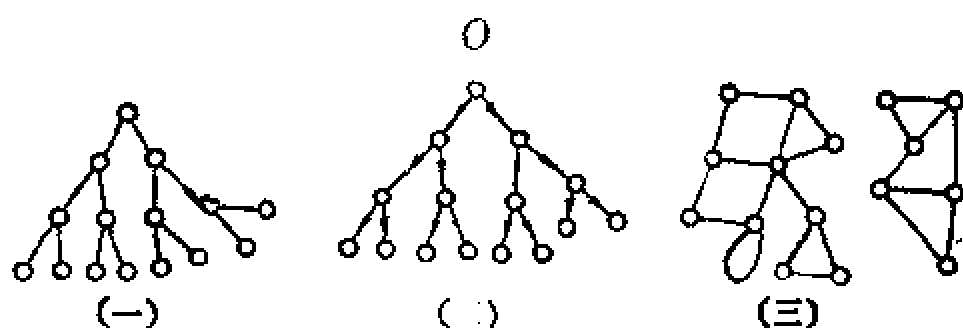


图 1.5

§3 图的顶与边（弧）

图里的点叫做图的**顶**，线叫做图的**边**。顶集用X表示，边集用E表示。一个无向图可写成 $G=(X,E)$。 设顶集仍用X表示，带箭头的线叫做图的**弧**，弧集用U表示，一个有向图便可写成 $G=(X,U)$。

在一个无向图上，一条自顶x到顶y的边通常写成$[x,y]$，有向图上的弧写成(x,y)。

§4 1——图

当一个有向图里两顶之间按一个方向最多只有一条弧时，这样的有向图平常记作 $G=(X,\Gamma)$，称作**1——图**。其中X是顶集，Γ实际上表示一种函数关系。比如图1.6，两点之间按一个方向只有一条弧。弧$\overrightarrow{x_1x_2}$，$\overrightarrow{x_1x_3}$，$\overrightarrow{x_1x_6}$都是从x_1出发的，可以把x_2、x_3、x_6看作顶x_1的后继顶，记作

$$\Gamma x_1=\{x_2,\ x_3,\ x_6\}$$

在一个无向图$G=(X,E)$里或有向图$G=(X,U)$里，除所给的顶集X里的顶之外，G不再有其他的顶，除E里或U里的边

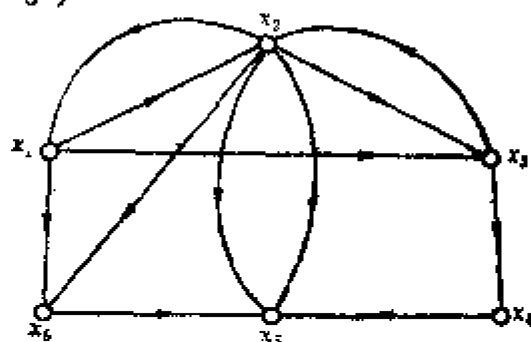


图 1.6

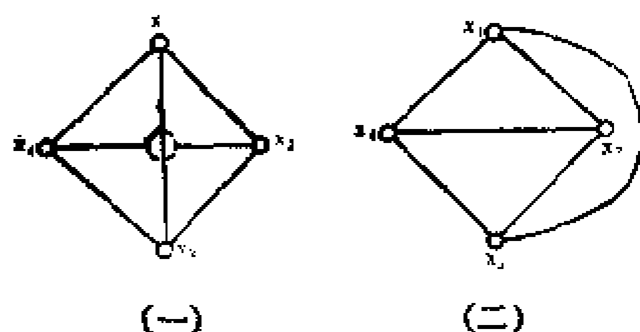
或弧之外也不再有其他的边或弧。当我们把一个图画在平面上时，图里所用的线当然不一定全是直线。也可能出现边与边（或弧与弧）之间再有其他非顶点的交点，我们决不能把这些点也看作是图的顶。一个图，顶点的个数记为$n=|X|$或$|G|$，称为图的**阶**。边数记为$m=|E|$。这里的“$|S|$”表示集合S里所含元素的个数。

§5　平面图与非平面图

一个图$G=(X, E)$本身就是一个想像中的图。为了直观，便于研究，往往把一个图画在平面上（比如一张纸上）。在画的时候往往产生边与边（或弧与弧）之间有非顶点的交点。这种点，有时可以避免，有时不能避免。

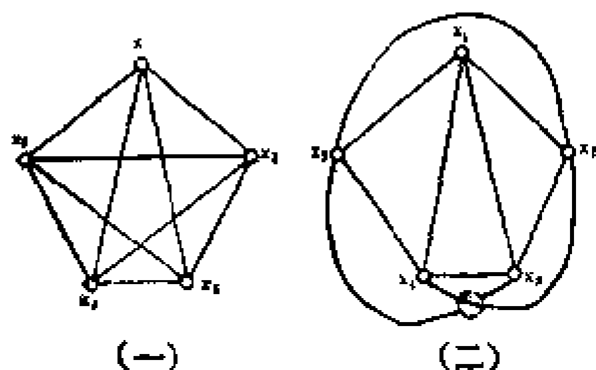
例如完全四点形，照平常的画法似乎边$[x_1, x_3]$与边$[x_2, x_4]$之间必有交点，如图1.7(一)那样。不过，当我们把图画成(二)那样时，那个交点就避免了。

可是有些图，当画在平面上的时候，非顶点的交点无法避免。例如完全五点形（记作K_5。一般，n个顶点、顶点之间一切可能连的边都存在的图称为**完全n点形**，记作K_n），当把它画在平面上的时候，边与边之间非顶点的交点是无法避免的（见图1.8）。又如上面讲的那个水电供应图（图1.3）也是这样，画在平面上的时候，边与边之间的



(一)　　(二)

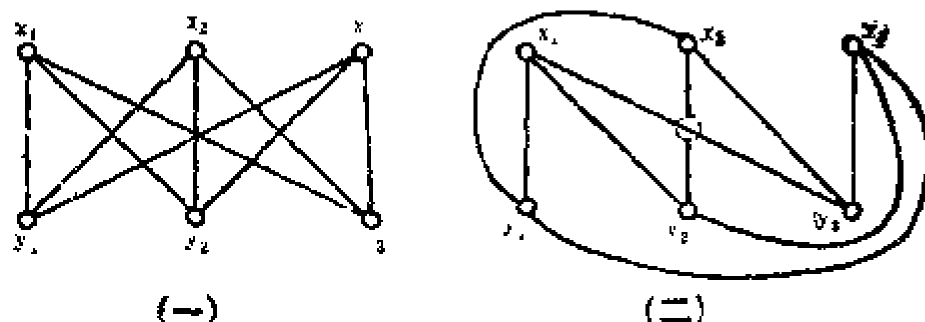
图 1.7



(一)　　(二)

图 1.8

非顶点的交点也是无法避免的（见图1.9）。



（一）　　　　（二）

图 1.9

由此可知，我们想像中的图有些可以画在平面上，使边与边（或弧与弧）之间不再有非顶点的交点；有些这样的交点却无法避免。前一类的图我们说它可以嵌在平面上，称为**平面图**。后者，叫做**非平面图**，也就是说这类图是不能嵌在平面上的。一个图究竟是平面的还是非平面的，是有一定的规律的（见第四章）。

§6 顶点次做

已给图$G=(X, E)$，在一顶x上边的个数记为$d_G(x)$，称为顶x的**次数**。于此，有下

定理1.1　　$\sum\limits_{x\in X} d_G(x)=2|E|=2m$。　　（1）

证　每条边有二顶，计算次数时，每条边在其端点各记一次，故上式成立。　　（证毕）

若已给有向图$G=(X, U)$，在任一顶x上的弧有的自x向外发出，有的自其他顶发入顶x。自x发出的弧的个数一般记作$d_G^+(x)$，称为**出次**，自外面发向x的弧数记作$d_G^-(x)$，称为**入次**。但下式是成立的

$$d_G(x)=d_G^+(x)+d_G^-(x)$$

在有向图上对于这个$d_G(x)$，（1）式总是成立的。

仿此，自顶x_i到顶x_j的弧的条数记作$d_G^+(x_i, x_j)$。

推理1.1a 在一个图$G=(X,E)$里，奇次顶的个数是偶数。

证 自（1）式来看，右端是一偶数，故自左端来看，奇次顶的个数应是偶数。因为只有偶数个奇数的和才能是偶数。

（证毕）

§ 7 部分图与子图

一个图当已知其顶集$X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$时，任取点对$(x_i, x_j)$，可能在二顶$x_i$，$x_j$之间有边相联，或有若干条边联此二顶。也可能顶集$X$分成若干组，每一组中的顶可以相联，即自一点到另外任一点总可有边，一边一边地联下去；但组与组之间的点则不能如此。如图1.10所示，其中（一）是相联的，（二）也是相联的。比如在图1.10的（一）中，自x_1到x_4，由x_1到x_7有边相联，x_7到x_6、x_6到x_4都有边相联，这样便可自x_1一边一边地联到x_4。在图1.10的（二）里每两点之间也可以这样一边一边地联过去。但（一）中任一点到(二)中的任一点便不可能一边一边地联接起来。在图1.10里还出现这样的边，它起于一个顶又回到这个顶。这样的边叫做**环**。又在图1.10里有的两点之间出现不只一条边，我们把这种图叫做**多重图**。如果两点之间最多有p条边，我们就把这样的图叫做**p——重的多重图**。或简称**p——图**。

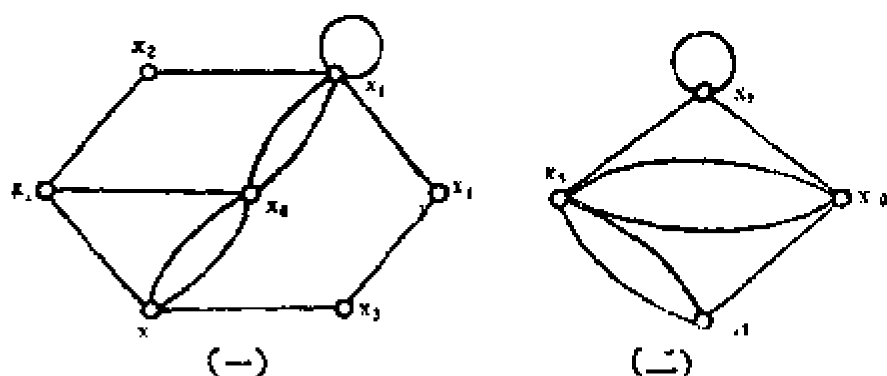


图 1.10

若一个图无环，又$p=1$，则我们称这样的图为**单纯的**。

若在顶x上有环，那么这个顶的次数便多计算两次。

一个图假使其中任意二顶x、y，总可陆续有边自x联到y，这样的图称为是**联接的**。如图1.10的（一）和（二）分别都是联接的。但若把（一）和（二）合成一个图看，则这个图便是**不联接的**。

一个图$G=(X, F)$分成几部分，每部分都是联接的，但部分与部分之间不相联接，每个联接的部分称为原图G的**联接的分子图**。如图1.10中的（一）和（二）都是这个图的联接分子图。

在一个图$G=(X, E)$里任意取出顶集$A\subset X$，及顶集A里出现的所有的边，则顶集A和这些边也构成一个图。其顶和边都含在原图G内，称为原图的**子图**，一般记作G_A。若任取边集E的一个子集$F\subset E$，作图(X, F)，则这个图称为原图的**部分图**。**子**图是就顶而言的，部分图则以边集为主。**子**图的部分图或部分图的子图称为原图的**部分子图**。

二顶之间有边相联，则这二顶称为**相邻**。二边如有公共的顶点，则这二边也称相邻。

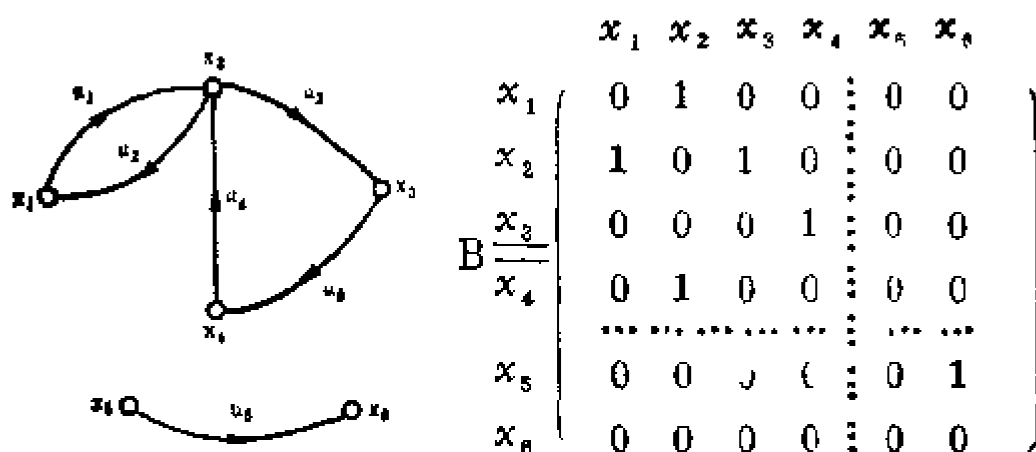
§8 图的矩阵表示

已给图$G=(X, E)$，可作出所谓图G的相邻矩阵来表达这个图，即取图的n个顶作为行与列，作n阶矩阵(a_{ij})如果在顶x_i与顶x_j之间有r条边，即$m(x_i, x_j)=r$，便在矩阵的(i, j)位置上写上r，即矩阵的元素$a_{ij}=r$。这样的矩阵充分表达了图上顶点相邻的关系，称为图G的**相邻矩阵**。例如图1.10，它的相邻矩阵便是如下示之矩阵A。这是一个对称的非负整矩阵，其元素的值不超过p，主对角线上的元素表示环的个数。如果图无环，主对角线上的元素便全都是0。如果图分成几个不相联接的联接分子图，它的相应的相邻矩阵便分成互不相交的几块。

A

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}
x_1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
x_2	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
x_3	0	1	1	1	0	2	0	0	0	0	0
x_4	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
x_5	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
x_6	1	0	2	0	0	0	2	0	0	0	0
x_7	1	0	0	0	1	2	0	0	0	0	0
x_8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	2
x_9	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0
x_{10}	0	0	0	0	0	0	0	2	1	0	1
x_{11}	0	0	0	0	0	0	0	2	0	1	0

在有向图$G=(X,U)$中取$a_{ij}=d_G^+(x_i,x_j)$，即自顶x_i到顶x_j的弧的个数。譬如下图1.11和它的联系矩阵B，这当然也是图1.11的相邻矩阵。当图分成几个联接的分子图时，它的联系矩阵也就分成相应的几个互不相交的分块，即几块互不相交的子矩阵。



	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	1	0	0	0	0
x_2	1	0	1	0	0	0
x_3	0	0	0	1	0	0
x_4	0	1	0	0	0	0
x_5	0	0	0	0	0	1
x_6	0	0	0	0	0	0

图 1.11

有时也把图$G=(X,E)$的边编起号码，以顶为行，以边为列写出相应的矩阵(a_{ij})，其中i、j表示第i顶上的第j边：

$$a_{ij}=\begin{cases}+1 & \text{当}x_i\in e_j\text{时}\\ 0 & \text{当}x_i\notin e_j\text{时}\end{cases}$$

在有向图$G=(X, U)$中，其相应的矩阵记为(μ_{ij})，其中：

$$\mu_{ij}=\begin{cases}+1 & \text{当}x_i\text{是}u_j\text{的起点时}\\ -1 & \text{当}x_i\text{是}u_j\text{的终点时}\\ 0 & \text{当}x_i\notin u_j\text{时}\end{cases}$$

这样的矩阵叫做**顶弧结合矩阵**。譬如上面画的有向图1.11，它的顶弧结合矩阵便是下边的矩阵M。像这样的矩阵，其形式有一个重要特点，就是它的元素都是0或+1或-1，而且每一列上有两个非零元素，一个是+1，一个是-1。

$$M=\begin{array}{c|cccccc|}
 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6\\
x_1 & +1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
x_2 & -1 & +1 & +1 & -1 & 0 & 0\\
x_3 & 0 & 0 & -1 & 0 & +1 & 0\\
x_4 & 0 & 0 & 0 & +1 & -1 & 0\\
x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1\\
x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1
\end{array}$$

§9 链与圈，路与回路

已给无向图$G=(X, E)$，假使自一顶x_0可有边不断相联，联到顶x_p。如在图1.12取

$\mu=[x_1e_1x_2e_2x_3e_7x_7e_{12}x_9]$

其中x_1、x_2是e_1的两个端点，x_2、x_3是e_2的两个端点，如此等等，这个点边所成的序列表示图里一个构形，它起于x_1止于x_9，称为图G的一条**链**。中间共经过四条边，我们便说这条链的长为4。一条链上如果没有重复的顶，便称这条**链是初级的**。上面列出的链便是一条长为4的初级链。

又如下面的链

$\mu=[x_1e_1x_2e_2x_3e_5x_4e_3x_1]$

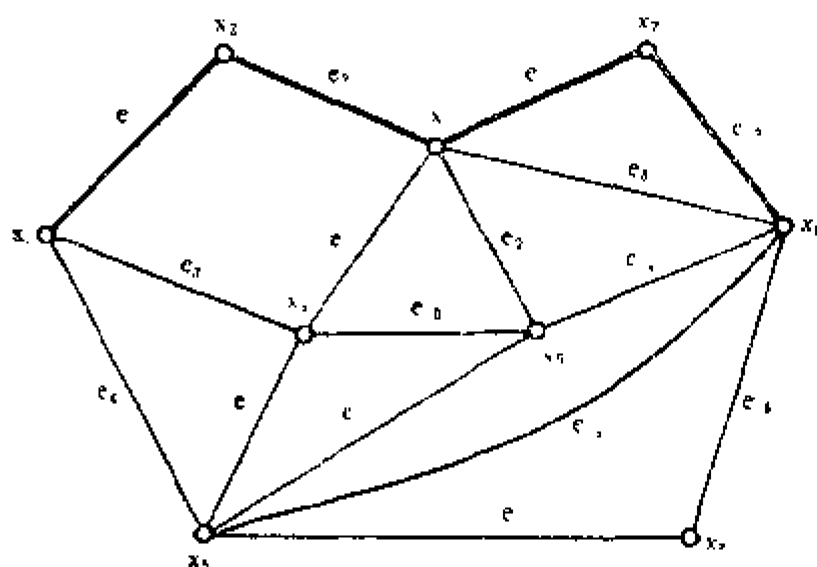


图 1 12

它的起点和终点合而为一，这样的构形称为一个**圈**，中间经过四条边，我们称它的长为4。除两个端点相重合外，中间没有其他重复的项，我们称这个**圈是初级的**。

又如

μ_1 $[x_1e_1x_2e_2x_3e_8x_6e_1\ x_8e_1{}_1x_5e_{11}x_6e_9x\ \ e_6x_4e_3x_1]$

μ_2 $[x_1e_1x_2e_2x_3e_6x_4e_3x_1]$

都是圈，但后者为初级，前者则否。

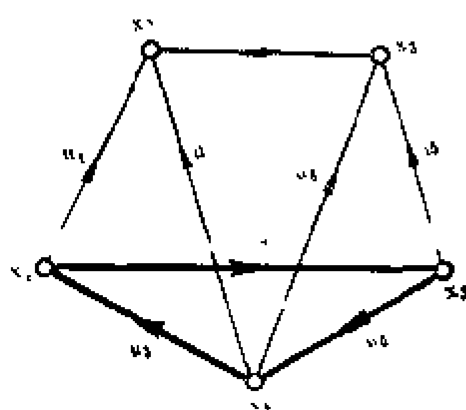


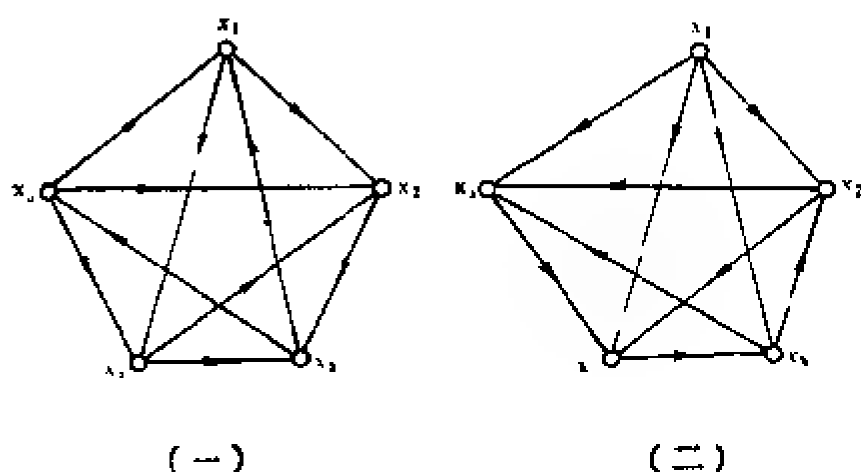
图 1 13

在有向图上与链和圈相对应的概念是路和回路。设自有向图的一个顶，循弧的正向前进，连续不断地到达另一个顶。如图1.13中的序列

$[x_1u_2x_5u_5x_3u_4x_2]$

其中每一项是在前面那条弧的终点，是在后面那条弧的起点，这样的构形称为有向图的一条**路**。假使一条路的起点和终点相合，便是一条**回路**或称**有向圈**。如序列 $[x_1u_2x_5u_6x_4u_3x_1]$ 便

是一个有向圈。如果路或有向圈上没有重复的点，这样的路和有向圈称为是**初级的**。记一条链（路）或圈（回路），有时把它所经过的边（弧）略去不记，只按序把它所经过的顶记下来。



（一）　　　　　　（二）

图 1 14

如图1.14（一）中，〔$x_5x_2x_4x_3x_1$〕是一条自 x_5 起到 x_1 长为 4 的一条路。〔$x_1x_4x_2x_3x_5x_1$〕是一条长为 5 的有向圈，这个圈过每个顶一次且仅一次。在图1.14(二)中，x_1 上四条弧都是外向的（即 $d_G^+(x_1)=4$，$d_G^-(x_1)=0$），故不可能有有向圈包含所有的顶点。$x_1x_4x_3x_2x_5$ 仍是一条过每个顶一次长为 4 的路。

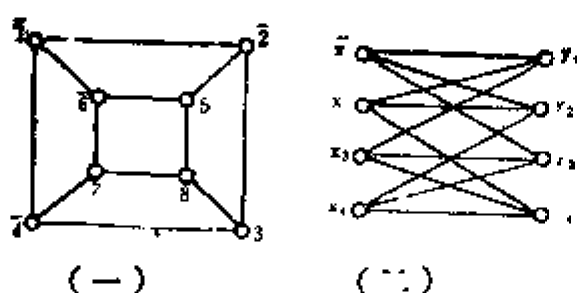
§10　图的同构

两个无向单纯图 $G_1=(X_1, E_1)$、$G_2=(X_2, E_2)$，若这两个图的顶点间有 1—1 的对应关系，且在这种对应下保持“相邻”的关系不变，则这两个图称为是**同构的**，记作

$$G_1 \cong G_2$$

两个图同构时，将相对应的点取相同的顺序，则这两个图的相邻矩阵实际上是一样的。

同构的图，表面看起来好像不一样，但由于我们研究的是顶边之间的联系，从中找出规律，因而同构的图在图论中是一



（一）　　　　（二）

图 1.15

样的。如左图1.15中的两个图，看起来似乎很不一样，可是这两个图却同构，它们的顶边之间的联系确实也是一样的。

在图1.15的两个图（一）与（二）中取

$x_1\leftrightarrow 1$，$y_1\leftrightarrow 2$，$x_2\leftrightarrow 3$，$y_2\leftrightarrow 4$，$x_3\leftrightarrow 5$，$y_3\leftrightarrow 6$，$x_4\leftrightarrow 7$，$y_4\leftrightarrow 8$，

则顶边结合的关系是一样的，其相邻矩阵同为

		1	2	3	4	5	6	7	8
(x_1)	1	0	1	0	1	0	1	0	0
(y_1)	2	1	0	1	0	1	0	0	0
(x_2)	3	0	1	0	1	0	0	0	1
(y_2)	4	1	0	1	0	0	0	1	0
(x_3)	5	0	1	0	0	0	1	0	1
(y_3)	6	1	0	0	0	1	0	1	0
(x_4)	7	0	0	0	1	0	1	0	1
(y_4)	8	0	0	1	0	1	0	1	0

习　　题

1、在哥尼斯堡七桥问题中，将路径用表示地域A、B、C、D的字母序列表示。例如ABD表示由A到B到D。在序列中必须出现几个字母？由确定每个字母出现的极小次数证明这个七桥问题是不可能的。

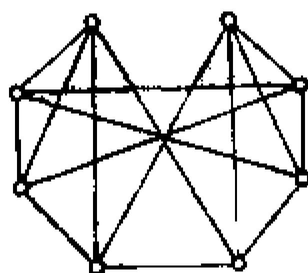
2、设在$N_m=\{0, 1, \cdots, m-1\}$中定义后继函数为：$\Gamma(k)=(k+1)\bmod m$，试作出此函数的图示。此图有什么特点？

3、设$S_n=\{k \mid k$是n的因子$\}$，在S_n中定义函数Γ　$\Gamma(k)=\{m \mid k$是m的因子$\}$，对$n=12, 30, 45$，作出此函数的图示。此图有什么特点？

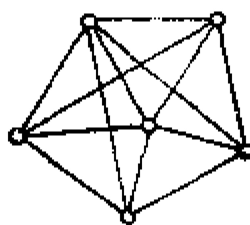
4、设 $B_n=\{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_i=0$ 或 $1, i=1, 2, \cdots, n\}$，以B_n为点集X，两点$x=(a_1, \cdots, a_n)$与$y=(b_1, \cdots, b_n)$间有一条边相连，当且仅当存在某个$k(1 \leq k \leq n)$使$a_K \neq b_K$，而对其他一切$i \neq k(1 \leq i \leq n)$均有$a_i=b_i$成立。对$n=1, 2, 3$，作出相应的图。一般$X=B_n$时，图$(X, E)$的阶是多少？边数是多少？这样的图$G=(B_n, E)$，我们称它为$n$维立方体。

5、设S为n元素集$S=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，取$X=\rho(S)$，即由$S$的子集形成的集合。任二元素$x$、$y \in X$，当且仅当$x \subset y$且$|y|-|x|=1$时，由$x$向$y$连一条边。这样得到一个有向图$G=(X, U)$。对$n=1, 2, 3$作出对应的图。此题中的图与上题中的图有什么关系。

6、下列各图是平面图吗？如是，作出其平面嵌入。如不是，试述其因。



(1)



(2)

7、如果$G=(X, E)$的顶点为$x_1, \cdots, x_n$，其次数依次为$d_1, d_2, \cdots, d_n$。序列$d=(d_1, d_2, \cdots, d_n)$称为图$G$的次序列。试证：非负整数列$(d_1, d_2, \cdots, d_n)$成为某个图的次序列的充要条件是$\sum d_i$为偶数。

8、如果在图$G=(X, E)$中分别以δ、$\triangle$记其最小次数与最大次数。试证：$\delta \leq 2m/n \leq \triangle$。

9. 如果一个单纯图$G=(X, E)$具有次序列$d=(d_1, d_2, \cdots, d_n)$，则称序列$d=(d_1, d_2, \cdots, d_n)$为图序列。试证. (1)序列(7, 6, 5, 4, 3, 3, 2)与(6, 6, 5, 4, 3, 3, 1)都不是图序列。(2)如果d是图序列，且$d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$，则$\sum\limits_{i=1}^{n} d_i$是偶数，而且：

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leq k(k-1)+\sum_{i=k+1}^{n} \min\{d_i, k\}$$

对$1 \leq k \leq n$均成立。（1960年Erdős和Gallai已证这也是充分条件。）

10、设$d=(d_1, d_2, \cdots, d_n)$是非负整数的不增序列。记$d'=(d_2-1, d_3-1, \cdots, d_{d_1+1}-1, d_{d_1+2}, \cdots, d_n)$，试证明：$d$为图序列，当且仅当$d'$为图序列。

11、设$S=\{x_1, \cdots, x_n\}$是平面上的点集合，任两点间的距离最少是1。试证：至多有$3n$对点的距离恰好为1。

12、单纯的图$G=(X, E)$的补图$\bar{G}=(X, \bar{E})$是这样的图，$(x_i, x_j)\in\bar{E}$，当且仅当$(x_i, x_j)\notin E$。试证：

$$|\bar{E}|=\frac{1}{2}|X|(|X|-1)-|E|。$$

13、试证：如G是不联接的，则$\bar{G}$是联接的。

14、试证：如G是单纯的，且其最小次数δ满足条件：

$\delta>\left[\frac{n}{2}\right]-1$，则$G$是联接的。

15、试证：图$G=(X, E)$为联接的充要条件是对于X的任一个分成二个非空集X_1和X_2的划分，都存在一条边(x_i, x_j)，其中x_i、x_j分别属于X_1和X_2。

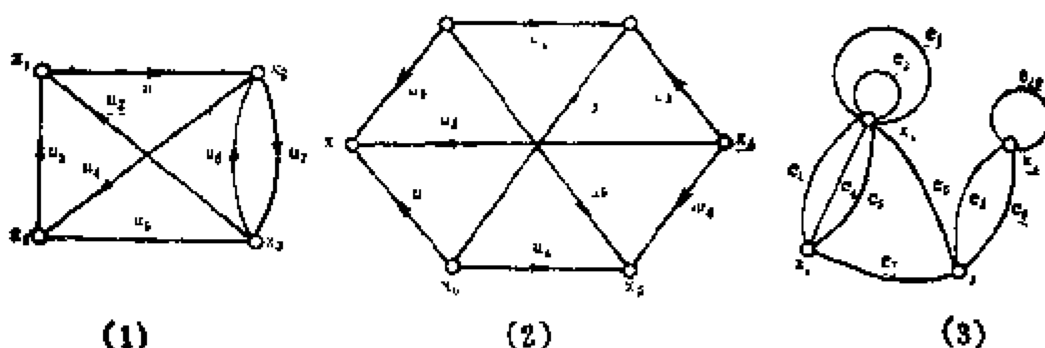
16、（1）试证，如G为单纯的图、且$m>\binom{n-1}{2}$，则G是联接的。

（2）对$n>1$，求出一个非联接的单纯图G，使得$m=\binom{n-1}{2}$。

17、试证：如果G是一个单纯的图，具n个顶点，p个联接的分子图，则G的边数至多为

$$\frac{1}{2}(n-p)(n-p+1)。$$

18、写出下列各图的相邻矩阵及顶边（弧）结合矩阵：



(1) (2) (3)

19、试描述如何由图$G=(X, E)$的相邻矩阵求出相应于顶点集$A\subsetneq X$的子图的相邻矩阵？举例说明。

20、试说明如何由图$G=(X, E)$的顶边结合矩阵求其子图、部分图及部分子图的顶边结合矩阵，举例说明。

21、试证：在有向图$G=(X, U)$中，如其相邻矩阵为$A=(a_{ij})$，则有

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}=d_G^+(x_i) \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ij}=d_G^-(x_j)。$$

22、一个图$G=(X, E)$被称为是k次正则的，如果对所有的$x\in X$、均有$d_G(x)=k$成立。试证：如果$A=(a_{ij})$是k次正则单纯图$G=(X, E)$的相邻矩阵，则AA'的主对角线元素均为k。

23、试证：如$A=(a_{ij})$是k次正则单纯图G的相邻矩阵 则k是A的特征根。

24、设有向图$G=(X, U)$的相邻矩阵为$A=(a_{ij})$，试证：如已$A^k=(a_{ij}^{(k)})$，则$a_{ij}^{(k)}$=由点x_i到点x_j的长为k的不同的路的条数（不一定为初级路）。

25、设$G=(X, E)$是单纯图，其最小次数为δ，$\delta\geq k$，则G中存在一条长为k的初级链。

26、试证明：在一个联接的图中，任二条最长的初级链均含有公共顶点。

27、设点x、y属于图$G=(X, E)$的同一个联接分子图，把G中x与y间的距离$d_G(x, y)$定义为G中最短的由x到y的初级链的长度。如果x、y不属于同一个联接分子图，则规定$d_G(x, y)$为无穷，试证明对G中任意三点x，y，z均有三角不等式成立：

$$d_G(x, y)+d_G(y, z)\geq d_G(x, z).$$

28、图$G=(X, E)$的直径定义为$\operatorname{diam}(G)=\max\limits_{x,y\in X} d_G(x, y)$，试证明：如$\operatorname{diam}(G)>3$，则$\operatorname{diam}(\bar{G})<3$。

29、试证：如果$\operatorname{diam}(G)=2$，且$G=(X, E)$是单纯的，阶为n，最大次数为$\Delta=n-2$，则其边数m满足$m\geq 2n-4$。

30、试证：如果单纯图$G=(X, E)$的最小次数$\delta\geq 2$，则G中含有一个长度至少为$\delta+1$的初级圈。

31、图G的围长$g(G)$是G中最短的初级圈长度。如G不含圈，则规定G的围长为无穷，试证明 （1）围长为$g(G)$ 4的k次正则图至少有$2k$个顶点。（2）围长为$g(G)$ 5的k次正则图至少有k^2+1个顶点。

32、试证明：围长为5、直径为2的k次正则图正好有k^2+1个顶点。且对$k=2$，3，作出相应的图。

33、试证明：如图$G=(X, E)$中边数$m\geq$点数n，则G中含有一个初级圈；如果$m\geq n+4$，则G中含有无公共边的圈。

34、在河岸有一只狼、一只羊、一棵白菜，摆渡人想把它们渡到对岸。可是他的船太小，一次只能装一样东西。根据明显的理由，狼和羊，羊和白菜不能在无人监视的情形下相处。问摆渡人应如何把它们渡过这条河。

35、两个人有一个装满8公升酒的坛子，同时分别有3公升、5公升容量的空坛子。问他们将酒等分的最简单方法是什么？

36、设$M=(\mu_{ij})$是有向图$G=(X,\ U)$的顶弧结合矩阵。试证：如果图G具n个顶点，n条弧，则$\det M=0$。

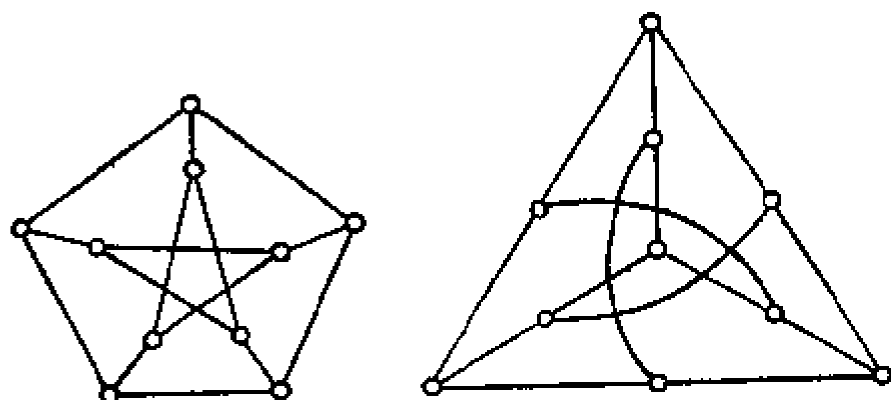
37、试证明下面所给的两个图G_1与G_2是不同构的。

38、证明：有11个不相同的 具四个顶点的单纯图。

39、如果单纯图G满足$G\cong\bar{G}$，则称G为自补的图。试证：若G为自补的图，则其顶点数n适合：n $0,1\pmod 4$。

40、设图$G=(X,\ E)$与$G_1=(X_1,\ E_1)$同构，其相邻矩阵分别是A及A_1，则存在一个(0、1)-矩阵P使得有：$PAP'=A_1$而且$|P|=1$，P是正交矩阵。

41、试证明下面的两个图是同构的。



42、图的自同构是图到自身的一个同构。

(1)试证 单纯图$G=(X,\ E)$的自同构可以看成是在X上保持相邻关系的一个置换。而且在通常置换的结合法则下，所有G的自同构形成一个群$\Gamma(G)$(称$\Gamma(G)$为G的自同构群)。

(2)试证：对任何单纯图G，G与其补图$\bar{G}$均有相同的自同构群。

43、设单纯图$G=(X,\ E)$的相邻矩阵A具不同的特征根，试证：G的自同构群是阿贝尔群。

第二章　树与树形图

§1　树

已给无向图$G=(X, E)$，设$n=|X|$是其阶，$m=|E|$是其边数，联接的分子图的个数是p。一个联接的无环图，至少具有两个顶点，设其上无圈，则这个图叫做树。树当然是一个单纯图。

例　六个顶点的树可举出如图2.1所示的几种。

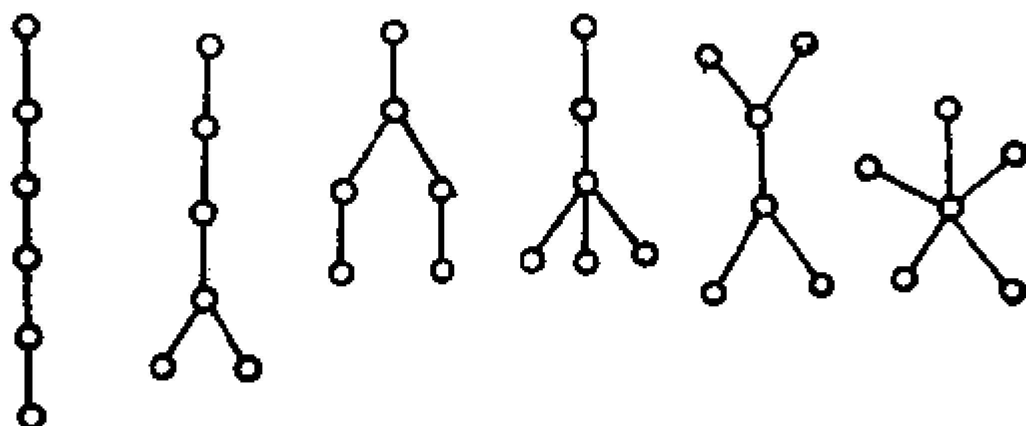


图 2.1

定理2.1　单纯无环的联接图$G=(X, E)$是树，其充分和必要条件是其中任二点之间有且仅有一条链相联。

证　必要性　设图G是树，由于联接性，任二顶x、y之间必有链相联。但x、y之间不能再有第二条链相联，否则图将有圈。

充分性　任二点之间有链相联，故图是联接的。图不可能有圈，否则，在这个圈上任二顶之间均有二链相联。

无环无圈无孤立点的图$G=(X, E)$叫做林。设图G可分成p个联接的分子图G_1，G_2，…，G_p，则据假设每个联

接的分子图将是一棵树。G由p棵树组合而成，树与树之间无边相联，因此图G称为林。

定理2.2 无环的联接图G是树，其充分和必要条件是任意去掉一边，图被截断（即其联接分子图的个数增加一）。

证 *必要性* 设e是联x、y二顶的边，去掉e，x、y二顶将被截断，否则x与y之间应再有链相联，于是图便有圈，这不可能。

充分性 去掉一边图才能被截断，故图是联接的。在图上必不存在圈，否则，在这个圈上任意去掉一边图将不被截断。这和假设相矛盾。故图联接无圈，据定义，图是树。

（证毕）

定理2.3 无环联接图$G=(X, E)$是树，其充分和必要条件是 $m=n-1$。 (1)

证 *必要性* 设图G是树，则G中至少有一个顶点x，其次数$d_G(x)=1$。否则每个顶的次数是2或大于2，则在图G上可自任一顶出发，自其一边走到另一顶，再自这个顶沿其上的另一边走到另一顶。这样继续走下去，由于图是有限的，最后或者回到原出发点，或者回到所走路程中的某一点。无论怎样，图G将有圈，这不可能。

设顶x是图G里次数为1的顶，以下对顶点的个数进行归纳。当$n=2$时，此时仅有一边，故(1)式成立。

设(1)式对于$n-1$个顶的树能成立。往证对于n个顶的树，(1)式也成立。

据上已知树G有次数为1的顶x，去掉x同时也去掉顶x上那条唯一的边，得图G'。G'无环联接，无圈，仍是一棵树。G'含$n-1$个顶，据归纳假设

应有 $$m-1=(n-1)-1,$$

于是 $$m=n-1,$$

即(1)式成立。

充分性　设图G无环联接且（1）式成立。欲证图G是树，往证其无圈即可。设G有圈，去掉圈上一边，此时所得的图无环联接，顶不变，但圈至少少了一个，边也少了一个。继续破圈，直至最后将圈破完得图G'，无环、无圈、联接，n个顶，边数$m'<m$。图G'显然是一个树。据本定理的第一部分应有$n-1=m'<m=n-1$，矛盾。故原图G应无圈，即原图是树。　（证毕）

在一个图里一个顶x上只有一边，即$d_G(x)=1$，这样的顶叫做**悬挂顶点**，边叫**悬挂边**。

推理2.3。　一棵树至少有二悬挂顶点。

证　据上章定理**1.1**有

$$\sum_{x\in X} d_G(x)=2m,$$

又据本章定理**2.3**有

$$\sum_{x\in X} d_G(x)=2(n-1)=2n-2,$$

树是无孤立顶的，故树中至少有二顶其次数为1。　（证毕）

读者可注意，这个推理的逆定理显然不成立。

定理2.4　无环的图$G=(X, E)$是树，其充分和必要条件是在任二顶之间加进一边之后恰好构造得一个圈。

证　必要性　设图$G=(X, E)$是树，则图是联接的，任二顶x、y之间有且仅有一条链相联，联边$[x, y]$便得一圈，且仅得一个圈。

充分性　设在任二顶x、y之间加进一边构造得一个圈，则在原图G中联x与y的，有且仅有一条链。据定理2.1，图是树。　（证毕）

§2　跨顶树

已给无向图$G=(X, E)$无环、联接。若G无圈，G本身

便是一棵树。若G有圈，通过破圈法，逐渐将圈破完，不减少顶点，不改变图的联接性，便得一棵树。它过原图的每个顶，称为原图的**跨顶树**（或称**支撑树**）。设原图记作$G=(X, E)$，跨顶树记作$T=(X, F)$。跨顶树实际上是原图的一个部分图。再作图$T_c=(X, E-F)$，图T_c也是原图G的一个部分图，取原图的顶集为其顶集，取树T以外的边为边集。T_c称为与跨顶树T相应的**余树**。余树不一定是联接的。由于跨顶树不同，也相应地有不同的余树。

例 图2.2中的（一）是原图，（二）、（三）、（四）中的实线所表示的图都是跨顶树，（二）、（三）、（四）中虚线边所构成的集合都构成余树的边集。

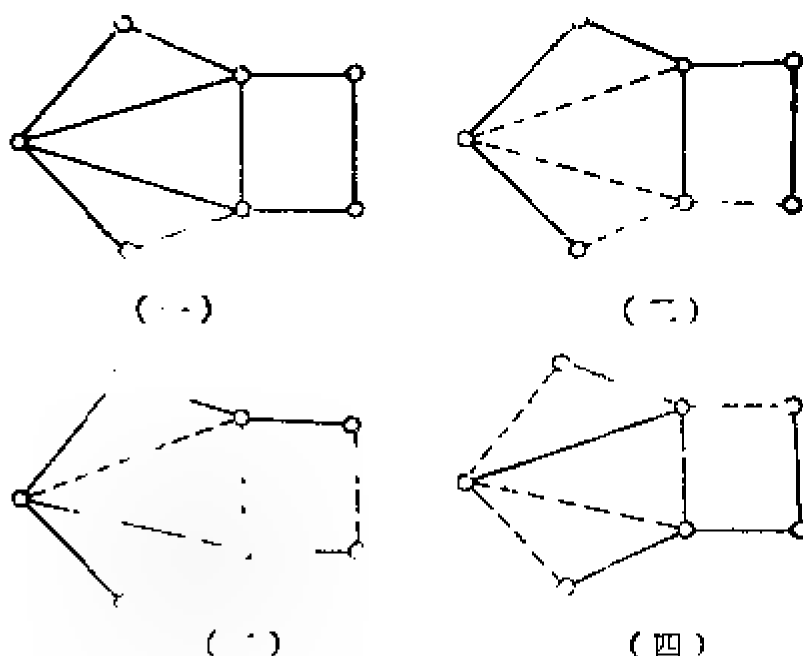


图2.2

若原图不联接，无孤立顶点，分成p个联接的分子图，则其跨顶树将是p个树，构成一个林，称为**跨顶林**。

定理2.5 任给图$G=(X, E)$，无环，无孤立顶，则这个图恒有跨顶树或跨顶林，且

$$m \geqslant n-p。$$

证 显然。

定理2.6 已给无环联接图$G=(X, E)$，作出它的跨顶

树$T=(X,F)(F\subset E)$，在余树T_C中任取一边e加进树T，得$T\cup e$，这个部分图$(X,F\cup\{e\})$含唯一一个初级圈。

证 在T_C中任取边e加进T得$T_1=(X,F\cup\{e\})$，将是一个含n项n边的联接图，$T\cup e$肯定不是树，故必含圈，且这样的圈必含e，以e为其一边。$T\cup e$中以e为一边的圈只能有一个。设μ_1与μ_2是$T\cup e$中的二圈都取e作为一边，则$\mu_1\cup\mu_2$将在e上重复，去掉边e，结果仍是一个圈，全取T的边做边，这是矛盾。

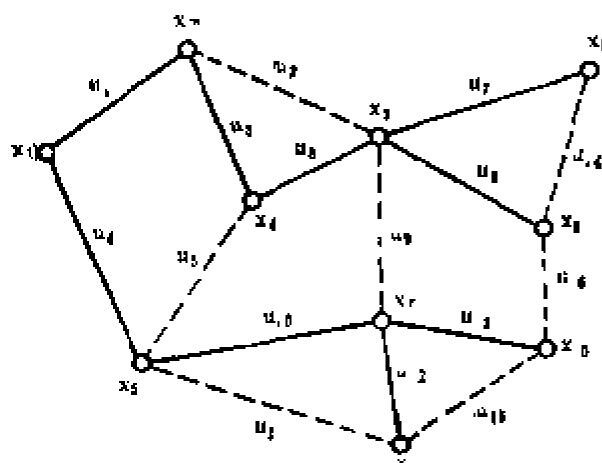


图 2.3

又$T\cup e$的那个唯一的圈不可能有点重复，否则将有圈全取T的边为边，这也是矛盾。（证毕）

例 图2.3的跨顶树是

$T=(X,F)$，

$F=\{u_1,u_3,u_6,u_7,u_8,u_4,u_{10},u_{12},u_{13}\}$，

$T_C=(X,E-F)$，其中

$E-F=\{u_2,u_5,u_9,u_{11},u_{14},u_{15},u_{16}\}$。

将u_2加进T，则$T\cup u_2$包含初级圈

$u=[x_2u_2x_3u_6x_4u_3x_2]$。

由于T_C共含$m-(n-1)=m-n+1$条边，其中每条边u唯一对应于一个初级圈μ_i，故在原图$G=(X,E)$中至少含有$m-n+1$个不同的初级圈。此即

推理2.6a 无环联接图$G=(X,E)$中至少含$m-n+1$个不同的初级圈。

推理2.6b 无环图$G=(X,E)$，设其联接的分子图的个数是p，则G中至少含有$m-n+p$个不同的初级圈。

§ 3 树形图

本节将研究有向图内的一种特殊构形，即所谓树形图。

一个有向图，假如它上面存在一顶a，自这顶a总有路通向图的其他各点，则顶a称为图的根。假使有向图$G\ (X, U)$是树（即把它的弧都看成是无向的边所得的相应的无向图是树），而又有根a，则这个图叫做以a为根的树形图。例如从水库流水的渠道网（只有一条渠道到达每一点）便是这样一个树形图。当然，平常的一棵树，把向上生长作为方向画起图来便是这样一种图形（这是本名称的由来）。又如从某个祖先起，他的子孙世系表画起图来，也是这样一个有根的树形图。

是树的有向图不一定是树形图，如图2.5。

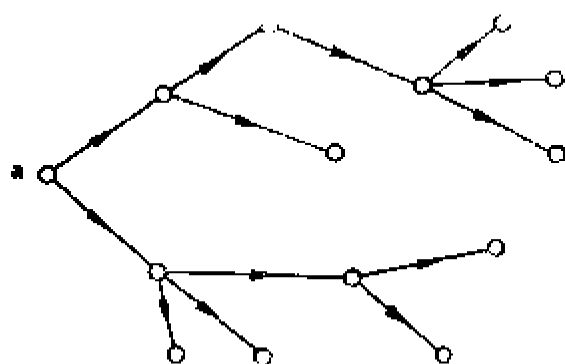


图 2.4

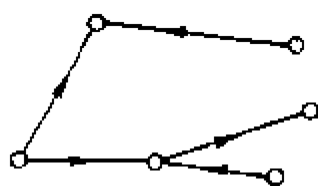


图 2.5

定理2.7 有向图$G\ (X, U)$是以a为根的树形图，其充分和必要条件是自顶a通向其他各顶有且仅有一条路。

证 必要性 自树形图的定义，显见自根a通向各顶有路。但只能有一条路，否则将出现圈，这是矛盾。

充分性 自根a通向任二顶x与y均有路，故x与y至少可通过根a相联接，由此知图是联接的。其次，图不可能有圈。否则，在这个圈上将至少会出现一顶有二弧走向这顶，因而有二条路自a走向这个顶，这是矛盾。参看图2.6。 （证毕）

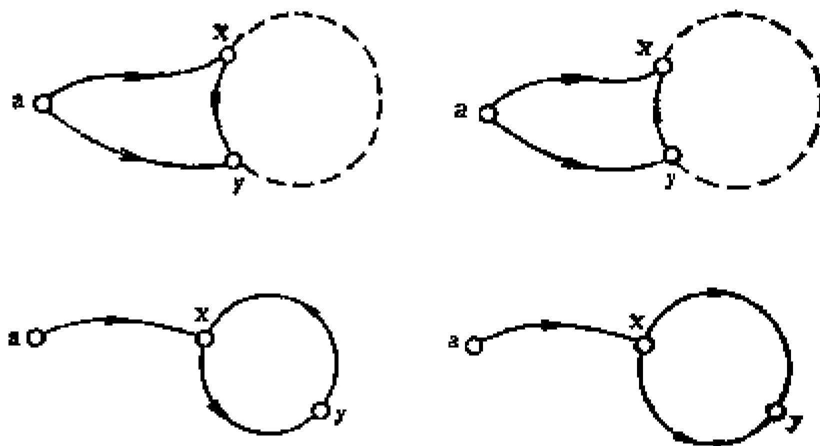


图 2.6

定理2.8 有向图$G=(X, U)$是树形图，以a为根，其充分和必要件是图无圈，且$d_G^-(a)=0$，$d_G^-(x)=1$（$x\in X$，$x\neq a$）

证 必要性 据定理2.7，自a到每一顶x（$\neq a$）有且仅有一条路，故有且仅有一条弧走向x，即$d_G^-(x)=1$。又不可能有弧走向a。否则，若有弧(y, a)（$y\neq a$），则自a到到y的路与弧(y, a)将构成有向圈，这是矛盾。

充分性 自任一顶$x\neq a$出发，按弧的相反方向行进，据定理的假设，这总是可能的。由于图有限、无圈，这样的行进，必终止于a，且只有唯一一种方法走到a。故自a到任一顶x有一条且仅一条路。据定理2.7，图G是以a为根的树形图。

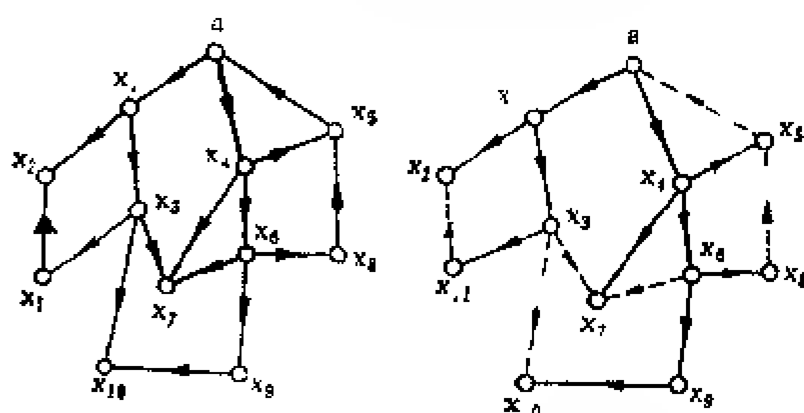
（证毕）

和无向图的跨顶树相类似，我们来研究有向图的跨顶树形图（即其对应的无向图是跨顶树）。

一个有向图$G=(X, U)$，设在其上任取二顶x与y，总在图里存在一顶$z(x, y)$，自z到x与自z到y均有路，这样的图叫做**准强联图**。譬如上面讲的以a为根的树形图便是这样一个准强联图。因在其上任二顶x与y至少总可取a为$z(x, y)$，使自z到x与y均有路。很明显，准强联图必是联

接的。因任二顶x与y总可通过那个顶$z(x, y)$相互联接。

图2.7中的两个图，很明显都是准强联的。（一）显然不是树，但以a为根。（二）是以a为根的树形图。



（一）　　　　（二）

图 2.7

定理2.9 有向图$G=(X, U)$有根的充分和必要条件为图G是准强联的。

证 必要性 这是很明显的。

充分性 命图的顶是$x_1, x_2, \cdots, x_n$，取顶x_1, x_2，由于图G是准强联的，有顶$z_2(x_1, x_2)$，自z_2到x_1与x_2均有路。再取x_3，则有顶$z_3(z_2, x_3)$，自z_3到z_2与x_3均有路。继续往下推，最后将有$z_n(z_{n-1}, x_n)$，自z_n到z_{n-1}与x_n均有路。这个z_n便是G的一个根。

定理2.10 有向图$G=(X, U)$有跨顶树形图，其充分和必要条件是图G为准强联的。

证 必要性 是很明显的。

充分性 设图G是准强联的，据定理2.9图G有根，命一个根为a。若图G无圈，则图G便是一个以a为根的树形图。若G有圈，总可去掉某些弧，将圈破掉而又不改变准强联性。直至破完所有的圈便得一个以a为根的跨顶树形图。参看图2.7，其中（二）便是自（一）用破圈法去掉若干弧（如虚线

所示）所得到的以a为根的树形图。（证毕）

在本章§2，我们在无环联接图$G=(X, E)$上讲了跨顶树，本节我们又在无环准强联的有向图$G=(X, U)$上讲了跨顶树形图。现在我们把这两者联系起来，主要是已给一个无环联接的无向图，怎样将边定向，使成为有向图，且有跨顶树形图。

定理2.11 已给单纯、无环联接图$G=(X, E)$，设$x_1\in X$是其任一顶，总可将E中的每一边定向，使成有向图$G_0=(X, U)$，在其中有部分图H是一个以x_1为根的树形图。

证 首先叙述所给图$G=(X, E)$某些边的定向方法，做出一个以x_1为根的树形图H。

自x_1起求出$\Gamma_G(x_1)$，由于G是无环联接的，$\Gamma_G(x_1)\neq\varnothing$且$\Gamma_G(x_1)\neq\{x_1\}$，选取$x_2\in\Gamma_G(x_1)-\{x_1\}$，将$x_2$加到序列$x_1$里成序列$\{x_1, x_2\}$，并将边$[x_1, x_2]$定向成弧$(x_1, x_2)$。设已求得序列$\{x_1, x_2, \cdots, x_i\}$，相应的边均已定向成弧。再求一顶$x_{i+1}$加到序列里来扩大序列。

在序列$\{x_1, x_2, \cdots, x_i\}$中找一顶$x_j$，使

$$\Gamma_G(x_j)\not\subset\{x_1, x_2, \cdots, x_i\}$$

且使x_j的下标j是满足这个要求的所有点中下标最大的。当$i<n$（图G里顶点的个数）时，由于图的联接性，这样的j总是存在的。选取

$$x_{i+1}\in\Gamma_G(x_j)-\{x_1, x_2, \cdots, x_i\},$$

并将边$[x_j, x_{i+1}]$定向成弧(x_j, x_{i+1})。

继续如此定向，最后必能用完所有的顶，得一个跨顶的有向部分图H（在原图$G=(X, E)$中，可能还有边没有定向）。以下往证H是一个以x_1为根的树形图。H满足以下条件：

（1）联接无圈；（2）$d_H^-(x_1)=0$；（3）$d_H^-(x_i)=1$，$(x_i\neq x_1)$。据定理2.8，H是一个以x_1为根的跨顶树形图。

§4 联接图上的最短路

在一个图G上（有向或无向），本节将往研究顶与顶之间的距离问题。重点在叙述一些法则，详细论证将予省略。设在无向图$G=(X, E)$上两顶u与v之间有初级链（路）相联，共含k条边，则称这条链的长度为k，设两点之间不相联接，则称这两顶之间的距离为无穷。在本节将讨论以下几个问题：

第一个问题：最短链问题。已给无向图$G=(X, E)$，假定它无环，要求找出其上二顶u与v之间最短的链，也就是要找出自u到v边数最少的链。

例 求图2.8中自u到v的最短链。

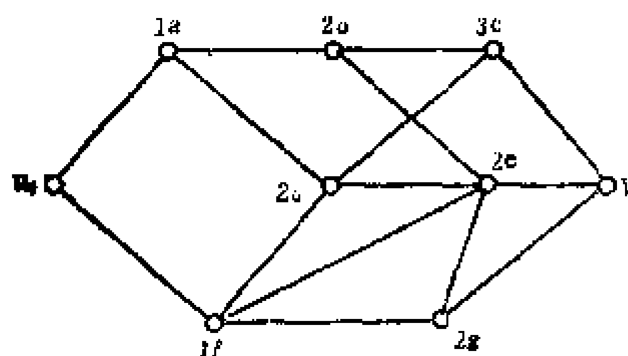


图 2.8

法则：用标号方法，自u起逐次将各点标号。

（1）将u标号为0，记在该点一旁。

（2）在图上找出与u相邻的顶，将其标号为1。

（3）设已标号到i，找出有与标号为i的顶相邻而又未标号的顶，若没有这样的顶而v又未标号，则标号停止，即v不能自u通过一条链来到达。若有这样的邻顶，将其标号为$i+1$。

（4）若v已标号，则v已到达。否则将i增加1重复（3）。

（5）若v已标号为$i+1$，则u到v的最短链其长为$i+1$，即u到v的最短距离是$i+1$。要找出实际这样的链，可自u（标号为0）起顺次取标号为1，2，…一直到顶v的$i+1$。就图2.8而言，共有两条最短链。一个是$ufev$，一个是$ufgv$。其实，要找出这样的链也可以自v倒过来找。设v的标号为$i+1$，自v走向一顶，其标号为i，再走向一顶，其标号为$i-1$，如此类推，直到u，其标号为0。

第二个问题：最短路问题。设在无向图$G=(X, E)$的每一边上给定一个非负数字，称为这条边上的**权**。例如，这个数字表示这条边的长度，如图2.9所示。一组边，其内每条边上的权之和称为这个边集合的权。我们把边$[x, y]$的权记作$l(x, y)$，边集合S的权记作$l(S)$。在实际生活中，这类问题是很多的。譬如联系若干城市的铁路网，边可能是二城市之间的距离，也可能是二城市之间货物运费等等。求某二城市之间的最短路程或最小运费，这便是所谓最短路问题。（当然，也可能存在极大问题。）这个问题和第一个问题是不一样的。实际上，第一个问题相当于其每一边上的权都是1这样一个特例。解决这样的问题的方法如下。

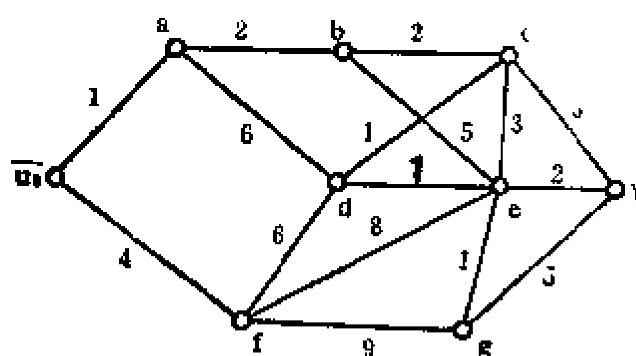


图 2.9

设边上的权代表距离。要求找自u到v的最短距离。自u到v的最短距离记为$d(u, v)$。

（1）在$X-u=\bar{S}$中找点u_1，使$l(u, u_1)$达到极小，即使$d(u, \bar{S})=l(u, u_1)=\min\{l(u, y) \mid y\in\bar{S}\}$

（$d(u, \bar{S})$表示由点u到点集$\bar{S}$中的点的最短距离）。于是得集合$S_1=\{u, u_1\}$，在点u_1上标以（1，$d(u, \bar{S})$）。

（2）设已找到$S_i=\{u, u_1, u_2, \cdots, u_i\}$，以$u$作为$u_0$并设自$u_0$到其中各点所经过的最短距离均已知。在$X-S_i=\bar{S}_i$中找点$v'$使得

$$
\begin{aligned}
& d(u_0, \bar{S}_i) \\
&= d(u_0, v') = d(u_0, u_k) + l(u_k, v') \\
&= \min\{d(u_0, u_i) + l(u_i, v) \mid u_i \in S_i, v' \in \bar{S}_i\}
\end{aligned}
$$

将所得到的顶v'作为u_{i+1}加进S得S_{i+1}，同时在u_{i+1}上标以$(i+1, d(u_0, \bar{S}_i))$。

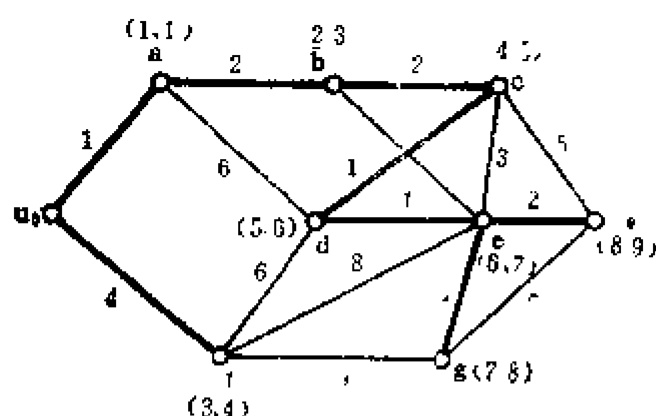


图 2.10

（3）重复（2），若只求u_0到v_0（顶v）的最短距离，当已得S_i其中含v，计算便可打止。否则用尽图中的点，不但找到自u_0到v_0的最短距离，同时也找到了自u_0到各顶的最短距离。按照上面的法则对图2.9进行的结果如图2.10所示。

第一步，在$X-u_0$中，找到顶a，命$X-u_0 = \bar{S}_0$，$d(u_0, \bar{S}_0) = 1$，在顶a标号（1，1），表示第一步求得u_0到a的最短距离是1，即$d(u_0, a) = 1$，$S_1 = \{u_0, a\}$。

第二步，作$\bar{S}_1 = X - S_1 = \{b, c, d, e, f, g, v_0\}$，求出

$$\min\{d(u_0, u_i) + l(u_i, v') \mid u_i \in S_1, v' \in \bar{S}_1\} = 3$$

得顶b，在b上标号（2，3），即第二次找到顶b，自u_0到b的距离比自u_0到$\bar{S}_1$中其他任何顶的距离都短，也比自u到a，再自a到其他任一顶的距离都短。此时$S_2 = \{u_0, a, b\}$，$d(u_0, b) = 3$。

第三步，求

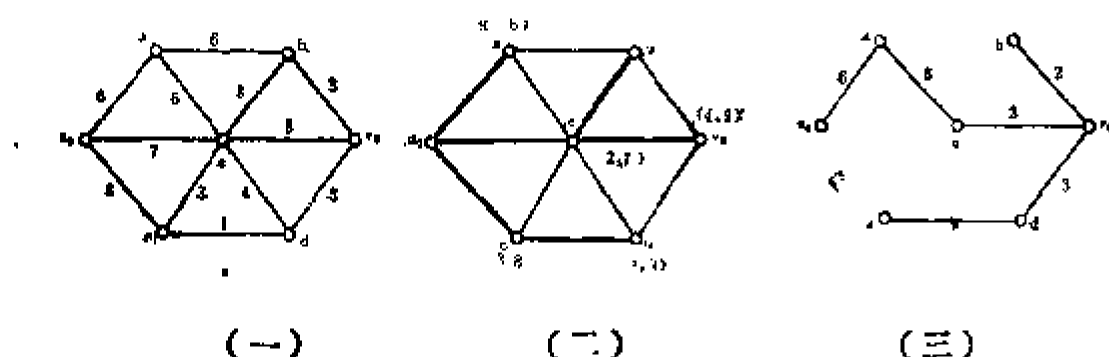
$$\min\{d(u_0, u_i) + l(u_i, v') \mid u_i \in S_2, v' \in \bar{S}_2\}$$

得出$v' = f$，即第三次求得顶f。u_0到f的最短距离是4，即$d(u_0, f) = l(u_0, f) = 4$。此时$S_3 = \{u_0, a, b, f\}$，在顶$f$标号（3，4），再在$\bar{S}_3 = X - S_3 = \{c, d, e, g, v\}$中找点$v'$使$d(u_0, v') = d(u_0, \bar{S}_3)$，即求

$$\min\{d(u_0, u_i) + l(u_i, v') \mid u_i \in S_3, v' \in \bar{S}_3'\}$$

得顶点c，在c旁标号（4，5）。如此继续往下求出新点加进S，标号如图2.10示。d标号为（5，6），e标号为（6，7），g标号为（7，8），v_0标号为（8，9）。括号中前一个数字表示迭代的次数，括号中后一个数字表示u_0到这点的最短距离。于是u_0到v_0的最短距离是9。表示这条最短距离的那条路是：$u_0abcdev_0$，这和在第一个问题里所求得的最短链$ufgv$或$ufev$都不一样。在此时，若取u_0fev_0为自u_0到v_0的路，则其长是14，而u_0fgv_0的长是18，都不是最短的路。自u_0到其他各顶的最短距离，是那顶上标号中括号里面的后一个数。自u_0画到那点的粗线表示其最短路程（参看图2.10）。

第三个问题：极小跨顶树问题。已给无环联接无向图$G=(X, E)$，在其每一边上给定一个非负实数作为这边的权。要求找出这个图里极小跨顶树，即要求找出一个跨顶树，使其权达到极小。这就是所谓极小跨顶树问题。譬如在图2.11中，（一）是7个城市，要修建一条交通网把它们联接起来。每二城市之间的修建费是各边上的权。总造价最小的交通网的求法是：



（一）　　（二）　　（三）

图 2.11

每次找权最小的边，继续加进权最小的边时，保持所得的交通网中无圈，直至用完所有的顶为止。图2.11中的（一）是原图，（二）是最短的路程图，（三）是极小跨顶树。第一次在原图中找到权最小的边是cd，其权是1。再在所剩下来的

边里找到ev_0，其权为2。再找出bv_0（权为2）。此时边eb（其权为3）虽然在所剩下来的边里权最小，但不取出，否则bev_0将构成圈。在所剩下来的边里，ce、dv_0的权都是3，最小，可任取一边。比如取dv_0。然后在余下的边中，虽然ce的权为3，最小，但不能取出加进所取得的边组里。否则在所取得的边组里将出现圈。在所剩下来的边组里，边ae与边ab，其权都是6，任取那一边都可以。比如取ae，再在所剩下来的边里取边u_0a。图2.11的（三）表示这样一个造费极小的交通网。这就是原图的一个极小跨顶树，其极小的权是20。这个方法就是有名的Kruskal法则。

第四个问题：求有向图上的最短路。这个问题和第二个问题大体是一致的。其最大的不同是在有向图上，在某一点的二弧如果方向相反，便不能从一个弧通过该点走向另一弧。

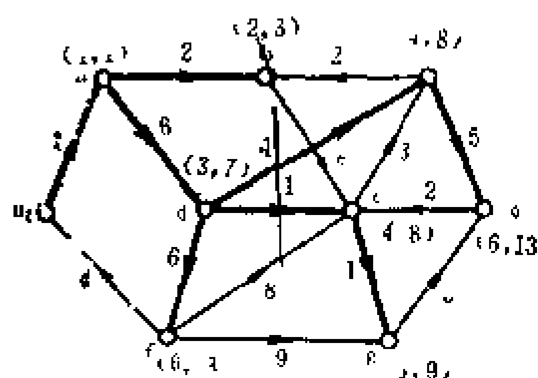


图 2.12

例如图2.12所示。在每一点旁边所附加的标号的前一个数表示迭代的次数。括号中的后一个数表示u_0到这点的最短距离。在这个问题里，当然假定u_0到v_0是有路可通的。否则按本节一开始所讲的那样，u_0到v_0的距离是无穷的。

第五个问题：有向图上极小的跨顶树形图。这个问题是朱永津和刘振宏解决的，可参看：

朱永津、刘振宏：On the Shortest Arborescence of a directed Graph, Scientia Sinica, Vol. XIV. No 10 (1965)

解决这个问题的法则如下：

设已给的有向图是$G=(X,U)$如图2.13，$|X|=n=9$，命$U^-(x)$表示内向顶x的弧组。

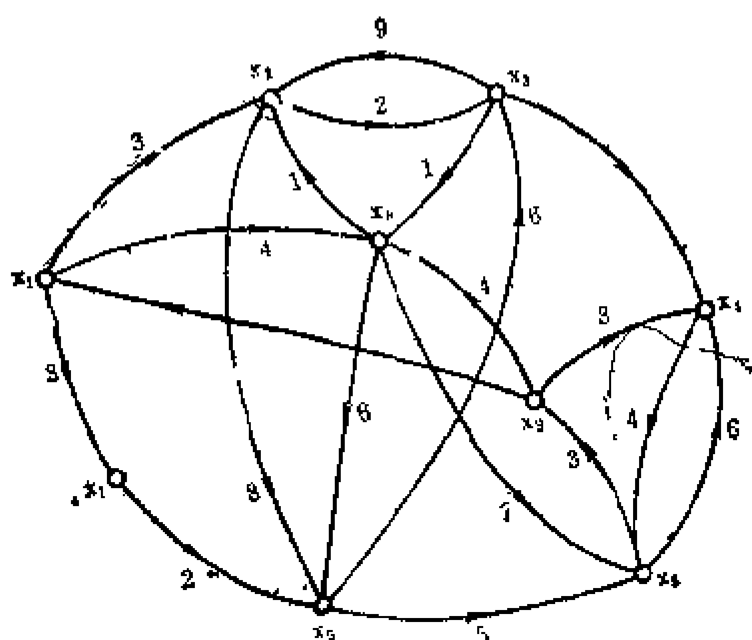


图 2.13

第一步，对每一顶x_i，当其$U^-(x_i)\neq\varnothing$时，在$U^-(x_i)$中选取弧u_i使

$$l(u_i)=\min\{l(u)|u\in U^-(x_i)\},$$

其中$l(u)$表示弧u上的权值。若有几条内向弧，其长（权值）相同，则在其中任选一条。根据这个选法，就图2.13而言，选出的弧组是

$$W_0=\{(x_9, x_1), (x_8, x_2), (x_2, x_3), (x_9, x_4), (x_4, x_5), (x_7, x_6), (x_1, x_7), (x_5, x_8), (x_6, x_9)\}。$$

第二步，设选出的弧组W_0其维$|W_0|<n-1$，则这个法则终止。若$|W_0|>n-1$，则在W_0里选取$n-1$条弧，舍去其中长度最大的弧，用V_0来表示这个弧组，即使

$$\max\{l(v)|v\in V_0\}\leqslant l(u)\ (u\in W_0-V_0),$$

这样的选择可能不是唯一的。在图2.13中有

$$V_0=W_0-\{(x_9, x_1)\},$$

因在W_0中$l(x_9, x_1)=7$，最长。

第三步，设在V_0中没有有向圈，则$H_0=(X, V_0)$便

是所要求的极小跨顶树形图。由于在每个顶上所取的都是极小的内向弧，据本章定理2.7，$|X|=9$、$|V_0|=8$，H_0显然是一个极小的跨顶树形图。设在H_0中存在有向圈$C_1^0, C_2^0, \cdots, C_{h_0}^0$，其中

$C_t^0=\{U_{t_1}, U_{t_2}, \cdots, U_t\}$，$t=1, 2, \cdots, h_0$ （$U_{t_i}\in V_0$，表示弧）则H_0显然不是树。如在本例，$H_0=(X, V_0)$共含两个有向圈：

$C_1^0=\{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_8)\}$，

$C_2^0=\{(x_9, x_4), (x_4, x_5), (x_5, x_9)\}$。

此时可将每个有向圈合并成一顶，得一新的有向图G_1，图G_1上各条弧的方向不变，其长具体确定如下：

$$l'(u_i)=\begin{cases} l(u_i) & \text{当}u_i\text{的终点不是合并所得的顶时，} \\ l(u_i)-l(u_{t_j})+d_t & u_i\text{的终点是一个合并顶，其终点与}u_{t_j}\text{在原图}G\text{中的终点相同，且} \end{cases}$$

$$d_t=\max\{l(u)\,|\,u\in C_t^0\}$$

按照这个法则得图，如图2.14。在图2.14中各条弧及其上的权，就是按照上面的原则决定的。在这个图G_1里去掉在合并顶上出现的环，仍记作G_1。重复第一、二、三步，一直到这

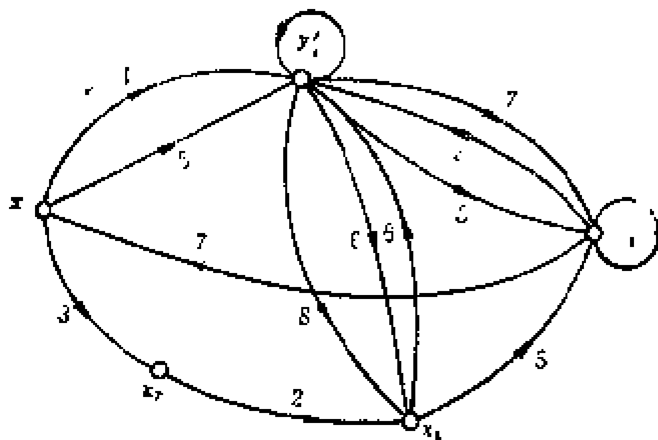


图 2.14

个法则终止为止（由于原图是有限的，这个法则必到某个时候终止），设最后得图G，其极小的跨顶树形图是$H_p=(X, V_p)$。在本例，图2.14按照法则的第一步找出其弧组W_1，如图2.15中粗线所示。据定理2.8，(X_1, W_1)是一个

以x_1为根的弧形图。它内向每一点的弧长是最小的，故这个部分图是一个极小的跨顶树形图。

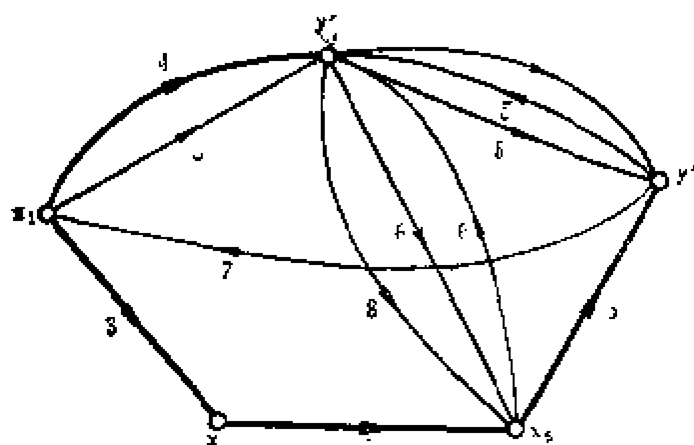


图 2.15

设已得图G_p，其极小的跨顶树形图为H_p。可按下述法则逐步还原成原图里一个极小的跨顶树形图。

第四步，首先将H_p扩充为G_{p-1}中的H_{p-1}如下：

设$y_t{}^p$是图G_p中的一个合并顶，其在G_{p-1}中的相应有向圈是$C_t{}^{p-1}$。**定义**

$$D_t{}^{p-1} = C_t{}^{p-1} - \{u_{tj}\},\ t = 1,\ 2,\ \cdots,\ h_{p-1},$$

当$y_t{}^p$是H_p的根时，取u_{tj}为$C_t{}^{p-1}$中的最长弧。否则，在G_p中将有弧$u_j \in V_p$，其终点是$y_t{}^p$。设u是G_{p-1}里一条弧（$u \notin C_t{}^{p-1}$），其在G_{p-1}中的终点为x（$x \in C_t{}^{p-1}$），则u_{tj}是$C_t{}^{p-1}$中取同一终点x的那条弧。

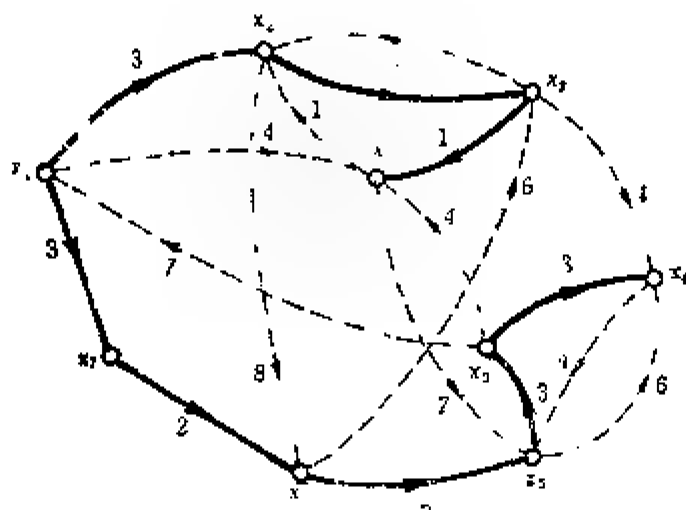


图 2.16

可以证明，自G_1中的极小跨顶树形图还原成的树形图是原图中的极小跨顶树形图。命

V_0 $\{(x_1, x_7), (x_7, x_6), (x_6, x_5), (x_5, x_9),$
$(x_9, x_4), (x, x_7), (x_2, x_3), (x_3, x_8)\}$

则 (X, V_0) 是图 G (X, U) 的极小跨顶树形图，其根是 x_1。（证略。一般须证 H_t 还原成 G_{p-1} 中的极小跨顶树形图，再还原成 G_{p-2} 中的极小跨顶树形图，一直到最后，还原成原图的极小跨顶树形图。读者如有兴趣，可参看所引文献。）

习 题

1．由证明树中最长的初级链的起点和终点都是次数为1的点，而证明：一棵树中至少有两个悬挂顶。

2．试证明 恰好有2个顶点的次数为1的树是一条初级链。

3 试证明 如果图 G 是一棵树，其最大次数 $\Delta\geq k$，则 G 至少有 k 个悬挂顶。

4．设图 $G=(X, E)$ 是由 p 棵树组成的林，$|X|=n$，$|E|=m$，则有 $m-n+p=0$。反之，如图 G 是由 p 个联结分子图组成的无孤立点的图，则当且仅当 $m-n+p=0$ 时图 G 是一个林。

5．试证：如果图 G 是恰有 $2k$ 个顶点的次数为奇数的林，则 G 中有 k 条彼此无公共边的初级链 $p_1, p_2, \cdots, p_k$，使得 $E(G)=E(p_1)\cup E(p_2)\cup\cdots\cup E(p_k)$。

6．设 T 是任一棵在 $k+1$ 个顶点上的树。试证：如 G 是单纯图，其最小次 $\delta\geq k$，则 G 中有与 T 同构的部分子图。

7 饱和烃是一个形如 C_mH_n 的分子，其中每一个碳原子都有4个接线，氢原子都有一个接线，而且没有由一串接线构成的圈。证明，对任一个正整数 m，当且仅当 $n=2m+2$ 时才有 C_mH_n 存在。

8．试证：正整数列 $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 是某一个树的次序列的充要条件是 $\sum_{i=1}^{n} d_i=2(n-1)$。

9．设图 G 中至少含一个圈（即 G 不是林），则其围长 $g(G)$ 满足：
$g(G)\leq 2\operatorname{diam}(G)+1$。

10 图 $G=(X, E)$ 的中心是使得 $\max\limits_{y\in X} d(x, y)$ 达到最小的顶点 $x(\in$

X）．试证明 树恰好有一个或两个相邻的中心。

1 试证 一个图$G=(X, E)$含有一个部分图是树，当且仅当G是联接的。

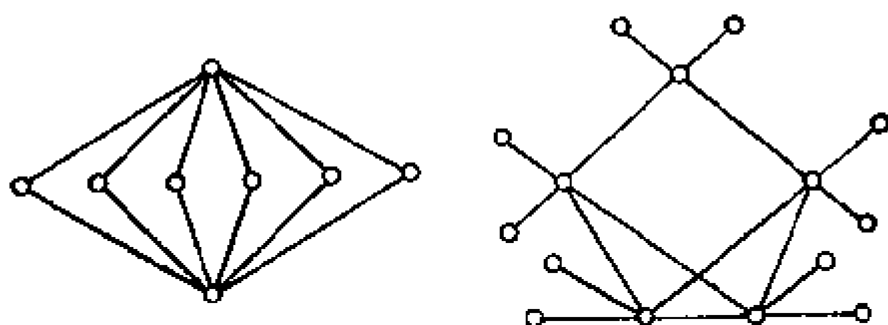
12 试证：如图$G=(X, E)$是一个林，含有p个树，则它至少有$2p$个悬挂点．

13 试证明：p个对象上的$(p-1)$个对换(u_1, v_1)，(u_2, v_2)，…，(u_{p-1}, v_{p-1})的集合生成一个对称群S_p，当且仅当以诸u_i、v_i为点、$[u_i, v_i]$为边的图是一个树．

14．试证明：如图G为无圈的，且恰好有一棵跨顶树T，则$G=T$．

15．试证明：如果F是图G的极大的成为林的部分图，则对G的每一个联接分子图$G_i=(X_i, E_i)$，$F\cap G_i$均是G_i的跨顶树．且F所含边数等于$|X|-p$，其中p表示G的联接分子图的个数．

16．在下列图中求出不同构的跨顶树。



17 试证：如果图$G=(X, E)$包含k个彼此无公共边的跨顶树，则对X的每一个划分$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，其端点在不同部分的边数至少有$k(n-1)$条．

（Tutte和Nash-Williams（1961）证明了这个关于G包含k个无公共边的跨顶树的必要条件也是充分的。）

18 设S是n个元素的集合。$\mathscr{A}=\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$是$S$的$n$个不同的子集的簇。试证明，存在一个元素$x\in S$使得集合$A_1\cup\{x\}$，$A_2\cup\{x\}$，…，$A_n\cup\{x\}$都是不同的集合．

19．试证明：如果图$G=(X, E)$是联接的，则对任一条边$e\in E$，恒存在至少一个G的跨顶树T_e使得：$e\in T_e$。

20 试证明：如果在图$G=(X, E)$中对某一边$e\in E$存在一个G的跨顶树T'_e使得：$e\notin T_e'$，则在G中存在一个初级圈C_e使$e\in C_e$．

21．图G中一条边e被称为是桥边，如果由G中除去边e后使G的联接分子图个

数加1。试证明，联接图G的边e属于G的所有的跨顶树，当且仅当e是一条桥边。

22 试证明，有向图$G=(X, U)$是有根的树形图的充分必要条件是，它是准强联的，而且有$(n-1)$条弧。此处$n=|X|$。

23 试证明：有向图$G=(X, U)$是有根的树形图的充分必要条件是，它是准强联的，而且自G中除去任一条弧后均破坏了其准强联性。

24. 试证明：有向图$G=(X, U)$是有根的树形图的充分必要条件是，它是准强联的，而且有一点a满足：$d_G^-(a)=0$，$d_G^-(x)=1$（$x\in X$，$x\notin a$，$a\in X$）。

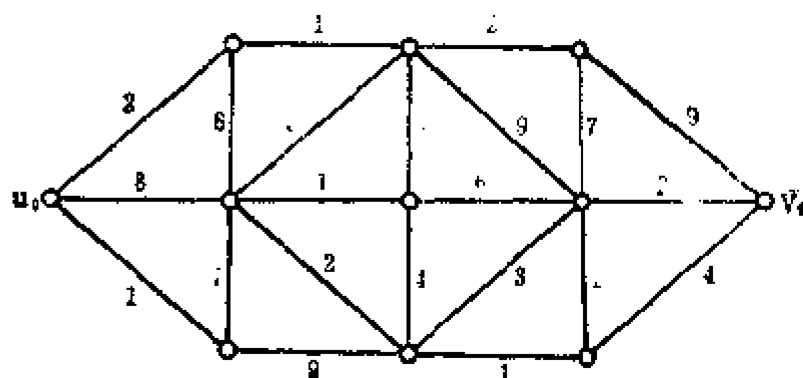
25 在定理11的条件下进一步证明，还可以将G中其余的边定向而使得：

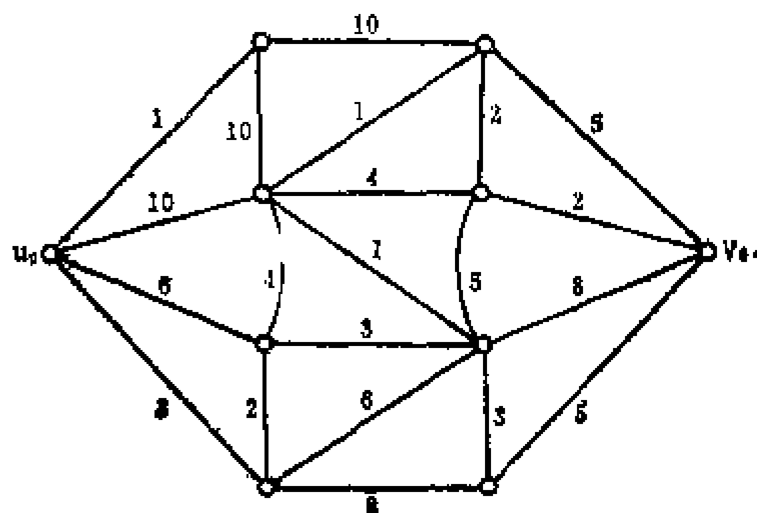
（1）与树H相联系的圈都是初级回路（初级单向圈）。

（2）G_0的每个回路都是这样与H相关联的圈。

26. 设有向图$G=(X, U)$含$m+1$个顶点及m条弧。$M=(u_{ij})$为其顶弧结合矩阵，试证图G是树的充分必要条件是自矩阵M中除去第$m+1$行后所得之方阵M_1的行列式等于±1。

27 设已知无向图$G=(X, E)$及其上各边的权值如下图示，试求u_0、v_0间的最短路。



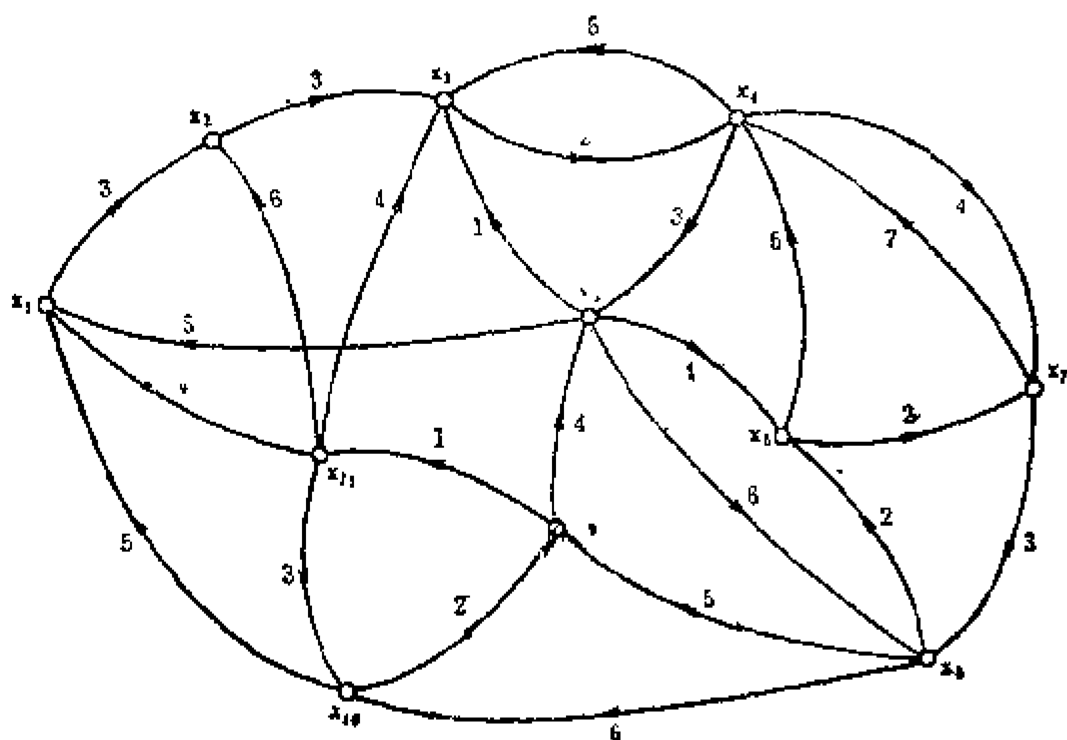


28　一个公司在六个城市C_1、C_2、…，C_6中的每一个都有分公司，从C_i到C_j的班机旅费由下列矩阵中的第（i，j）个元素给出(∞表示没有直接的班机。)试求出一个表示两城市间最便宜路线的表格。

$$
\begin{pmatrix}
0 & 50 & \infty & 40 & 25 & 10 \\
50 & 0 & 15 & 20 & \infty & 25 \\
\infty & 15 & 0 & 10 & 20 & \infty \\
40 & 20 & 10 & 0 & 10 & 25 \\
25 & \infty & 20 & 10 & 0 & 55 \\
10 & 25 & \infty & 25 & 55 & 0
\end{pmatrix}
$$

29．在27题的图上各求出一个极小跨预树。

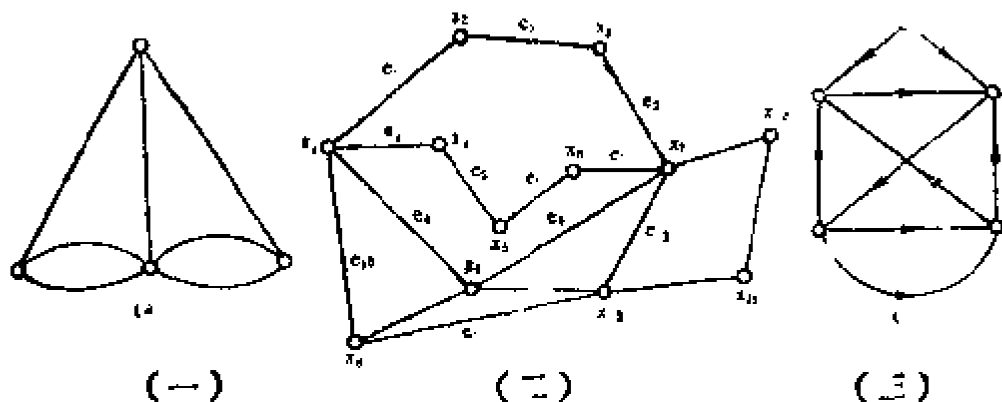
30　在下列有向图$G=(X, U)$上求出其极小跨项树形图。弧上的数字表示其权值。



第三章 圈和圈维数

§1 尤拉圈

已给联接无向多重图 $G=(X, E)$。设一个人可自这个图的任一点出发，顺着图的边行进，每边必须经过一次且只许经过一次，最后再回到原出发点，则这样的图称为**尤拉圈**。



（一）　　（二）　　（三）

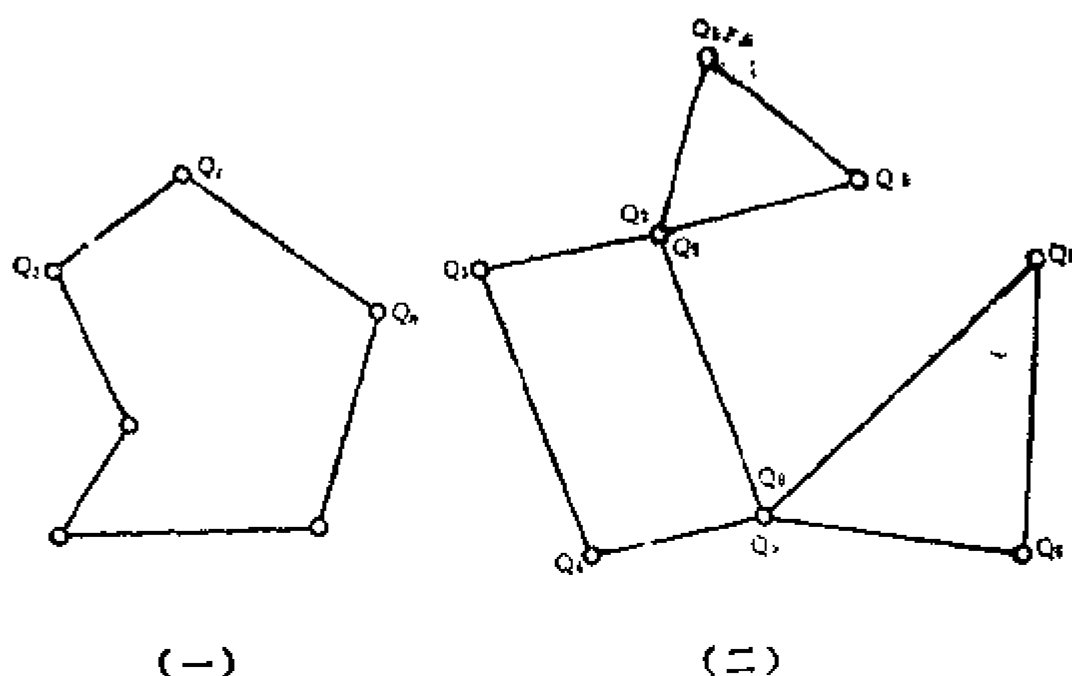
图 3.1

图 3.1 的（一）就是那个著名的七桥问题的图。尤拉肯定它不是一个尤拉圈，一个人不可能自一顶出发经过每边一次且仅一次，再回到原先的出发点。但图 3.1 的（三）则是一个尤拉圈。又图3.1的（二）中那个部分子图（$\{x_1, x_2, \cdots, x_{10}\}$，$\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$）也是一个尤拉圈。那么，在什么样的条件下，一个无环无向的多重图才是一个尤拉圈呢？为回答这个问题，先来讲无环无向图上的闭路。

设在无环无向图 $G=(X, E)$ 上，给了一个边的序列

$$z=(Q_1Q_2,\ Q_2Q_3,\ \cdots,\ Q_{n-1}Q_n,\ Q_nQ_1),$$

在这个序列里，无重边，可能有点相重，自 Q_1 循序列里边的顺序行进到 Q_n 再回到 Q_1，称为图 G 上的一个**闭路**，就闭路而言，其每一点的次数显然都是偶的。



（一）　　　　（二）

图 3.2

图3.2中的（一）与（二）都是闭路，（一）无重点无重边，（二）有重点无重边。

上面讲的尤拉圈，实际上是一条闭路，包含图的每一边，一次且仅一次。

引理3.1　已给图$G=(X, E)$，有限（含有限个顶与有限条边）、无环、无孤立点，其每一顶上的次数都为偶，则其每个顶点，必在一个闭路上。

证　设Q_1是图G的一个顶，在Q_1有边Q_1Q_2，因Q_2的次数为偶，故还有边Q_2Q_3，异于Q_1Q_2，自Q_3可再引边Q_3Q_4，…，一直到点Q_n，若$Q_n=Q_1$，则引理已证，否则，由于图是有限的，这样引边，不可能无限地引伸下去，必到某个地步仃止下来，若仃止在某个异于Q_1的任一顶上，图中将出现奇次顶，这是矛盾，故最后必仃止在Q_1，得一闭路。（证毕）

引理3.2　已给图$G=(X, E)$，有限、无环、无孤立点，设在其上有二闭路z_1　$(P_1, P_2, \cdots, P_n, P_1)$与$z_2=(Q_1, Q_2, \cdots, Q_m, Q_1)$，若此二闭路有共同顶$Q'_n$，无共同边，则此二闭路，可合并成一闭路。

证　设两条闭路的共同顶是Q'_n，将二闭路分别写成

$$z_1=(P_1,\ P_2,\ \cdots,\ Q'_n,\ P_l,\ \cdots,\ P_s,\ P_1)$$

$$z_2=(Q'_n,\ Q'_{n+1},\ \cdots,\ Q'_m,\ Q'_n)$$

则 $z=(P_1,\ P_2,\ \cdots,\ Q'_n,\ Q'_{n+1},\ \cdots,\ Q'_m,\ Q'_n,\ P_l,\cdots,\ P_s,\ P_1)$，

便是一个闭路包含z_1与z_2，见图3.3。

（证毕）

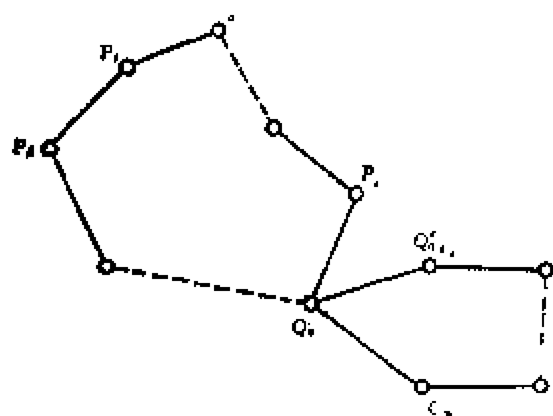


图 3.3

定理3.1　一个无环无向多重图$G=(X,\ E)$是尤拉圈的充分和必要条件是：（1）图是联接的；（2）其每个顶的次数为偶。

证　*必要性*　设图是尤拉圈，定理中的条件能成立是显然的。

充分性　设已给图G，满足条件（1）与（2），往证其为尤拉圈。首先，在图G里，作极大闭路$z=(Q_1,\ Q_2,\ \cdots,\ Q_n,\ Q_1)$设闭路$z$包含所有的边，这个闭路便是尤拉圈。否则，在原图$G$里去掉这个闭路，得部份图$G'\subset G$，$G'$的每个顶的次数都为偶。$G'$与$z$必有共同点$Q$，否则$G=G'\cup z$将是断的，这是矛盾。在图$G'$里，据引理3.1将有闭路$z'$包含$Q$，又据引理3.2，在原图$G$里，闭路$z$与$G'$里的闭路$z'$可合并成$G$里一条闭路长于$z$，这是矛盾。

（证毕）

注1．在无环联接图$G=(X,\ E)$里找尤拉圈，实际上就是我国民间大家感兴趣的所谓"一笔画问题"：一个图可否用笔不离开纸将其全部画出，每条边须画一次，且只许画一次。

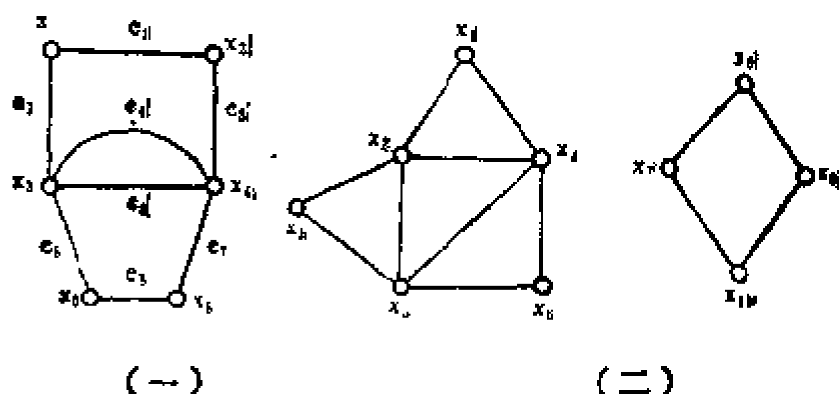
注2．在以上的研究中，都假定图无环，其实，可以去掉这个假定，当环在一顶上，把由环形成的次数记为2即得。

推理3.1： 尤拉圈E是一个初级圈或是边互质（即彼此无公共边）的初级圈之合。

证 设尤拉圈E无重点，这个圈本无重边，故图是一个初级圈。

设尤拉圈E有重点Q，据引理3.1在圈E上过Q有闭路z_1z_2，则E将是二闭路z_1与z_2之合，即$E=z_1\cup z_2$，若在z_1与z_2上再有重点，仍可在重点拆分成二闭路之合，因图是有限的，经有限次这样拆分之后，原图E将是若干个初级圈之合。

（证毕）



（一）　　　　（二）

图 3.4

图 3.4 的（一）是一个尤拉圈，它是边互质的两个初级圈$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$与$\{e_5, e_6, e_7, e_8\}$之合，但它也是$\{e_1, e_2, e_5, e_3\}$与$\{e_4, e_6, e_7, e_8\}$两个初级圈之合。因此，将尤拉圈写成初级圈之合，其写法不是唯一的。

又如圈 3.4 的（二）本身是不联接的，但其联接分子图都是尤拉圈。当然这个图也可以写成几个边互质的初级圈之合（其写法是不唯一的）。

又如图 3.5 中（一）是原图，它不是尤拉圈。虽然它也包含几个初级圈（如（二）、（三）、（四）），但是不能写成边互质的初级圈之合。若将无向图$G=(X, E)$的任一部分子图，它是若干个尤拉圈之合，叫做**广义圈**，仍简称为圈，则据推理

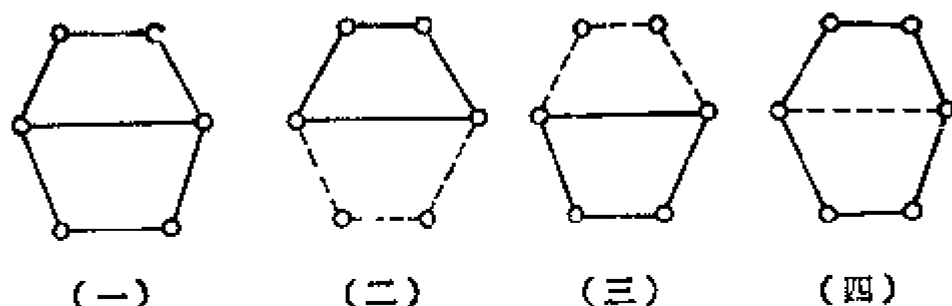


图 3 5

3.1，便有

推理3.2 无向图$G=(X, E)$的任一圈是初级圈或者是若干个边互质的初级圈之合。

将上面讨论的无向图上的尤拉圈，推广到有向图上来，已给有限有向图$G=(X, U)$，若在这个有向图上，存在回路，过每条弧一次且仅一次，则这个有向图称为**尤拉回路**，据定理3.1有

推理3.3 有限的有向图$G=(X,U)$是一个尤拉回路，当且仅当（1）G的底图①是联接的，（2）在每一点x上，有

$$d_G^+(x)=d_G^-(x)。$$

§2 环 和

两个集合A与B，取其在A或在B中、但不同时在A与B中的元素，作为集合C，称C为A与B的**环和**，记作$A\oplus B$，显见

$$C=A\oplus B=(A\cup B)-(A\cap B)。$$

环和$A\oplus B$与合$A\cup B$是不一样的，前者不含A与B的公共元素，后者则含这些元素，若$A\cap B=\phi$，则

$$A\oplus B=A\cup B,$$

此时可以把环和简称为**和**。

①G的底图，即把G中的弧为看成是无向的边所得的图。

在无向图$G=(X,E)$上，任一初级圈就其边集而言，它是原图G的边集E的一个子集，就其顶而言，其每个顶的次数是2，于是有

定理3.2 无向图若干个初级圈的环和是一个圈。

证 （1）就两个初级圈而言，若此二圈边互质，则此二初级圈或有公共顶点，或无公共顶点。在前一情况下，公共顶上的次数都是4，在后一情况下，每个顶上的次数是2。故此二者的环和，其每个顶的次数都是非0偶数。据定理3.1，这个环和是一个圈。

若二初级圈有公共边且公共边之间彼此不相邻。设x是公共边上一顶，则在环和中顶x的次数将是$2+2-2=2$（因去掉公共边，x的次数应少掉2），是一个大于零的偶数。如公共边有彼此相邻者，x是二相邻公共边的公共顶，则在环和中顶x的次数为0。但当二初级圈不同时，不可能所有公共顶都是相邻公共边的公共顶。

（2）设初级圈的个数多于2，若这些初级圈两两边互质，其环和的顶次数很明显，都是$\geqslant 2$的偶数。若这些初级圈有公共边，则如（1）所证，总有一些公共顶的次数为至少是2的一个偶数（其余公共顶的次数为0）。于是这些初级圈的环和是图G的一个部分子图，其各顶上的次数都是偶数。据定理3.1，这个环和是一个尤拉圈，或是几个不联接的尤拉圈之和，故是一个圈（广义圈）。

（证毕）

读者可注意，一个初级圈，它和它本身的环和将不含任何边。我们把这样特殊的部分图也叫做圈，称为$\varnothing$—圈。

§3 余 圈

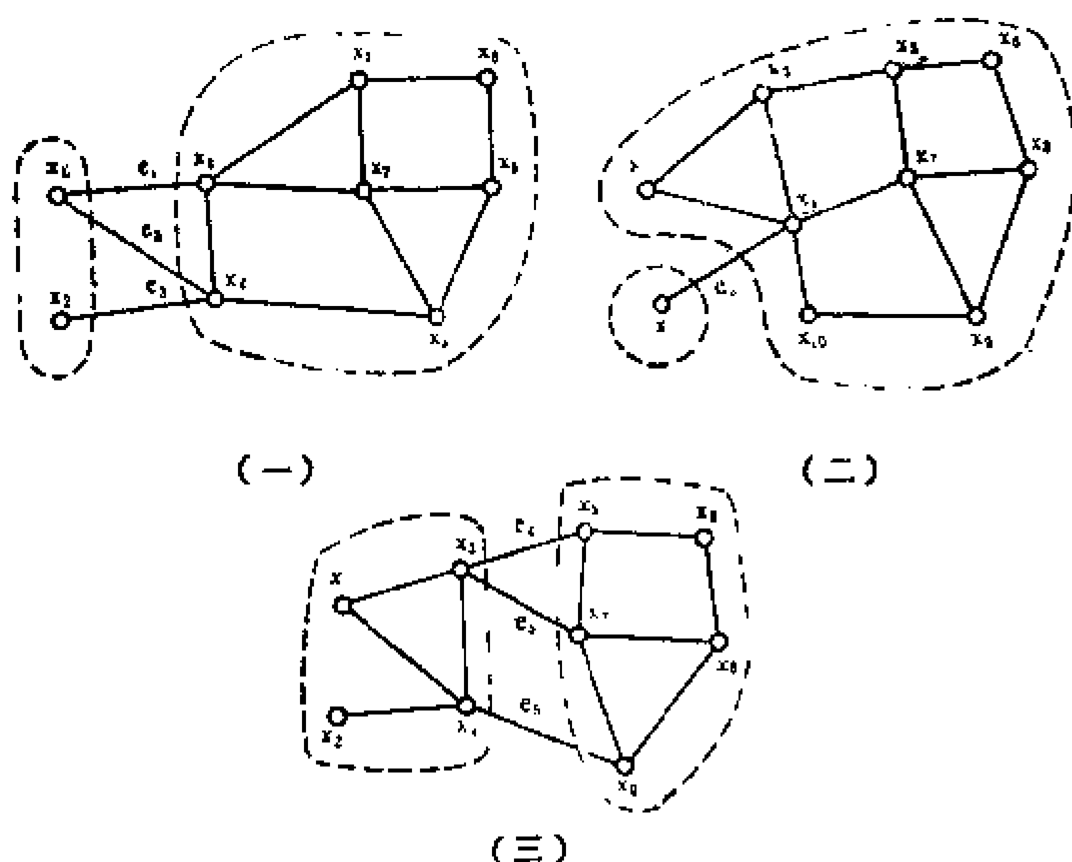
已给无向图$G=(X,E)$，将其顶集X任作一个分划(X_1,X_2)，使

$X_1, X_2 \neq \varnothing, X_1 \cap X_2 - \varnothing, X_1 \cup X_2 \quad X$
图G的边，其一个顶在X_1内，另- 个顶在X_2内，所有这样的边构成边集E的一个子集，称为图G的余圈，记作

$\omega〔X_1, X_2〕$。

若有A、$B \neq \varnothing$，A、$B \subset X$，$A \cup B - C$，$A \cap B = \varnothing$，其中G_A与G_B都是G的联接子图，G_C是G的联接分子图，则G的边，其一个顶在A内，一个顶在B内者构成边集E的一个子集合，称为图G的**初级余圈**。

由上定义可知，如图$G \quad (X, E)$是联接的，G_{X_1}与



（一） （二）

（三）

图 3.6

G_{X_2}都是G的联接子图，则余圈$\omega〔X_1, X_2〕$是初级的。

例如图3.6中的（一），$X_1 \quad \{x_1, x_2\}$，$X_2 \quad \{x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\}$，$\omega〔X_1, X_2〕 \quad \{e_1, e_2, e_3\}$是一个余圈。如取$X_1 \quad \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$，$X_2 \quad \{x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\}$，则图$G_{X_1}$与$G_{X_2}$都是一个联接的部分

子图，故$\omega[X_1, X_2]=\{e_4, e_5, e_6\}$是一个初级余圈（见图3.6的（三））。

定理3.3 在无向图$G=(X, E)$里，二余圈的环和是一余圈。

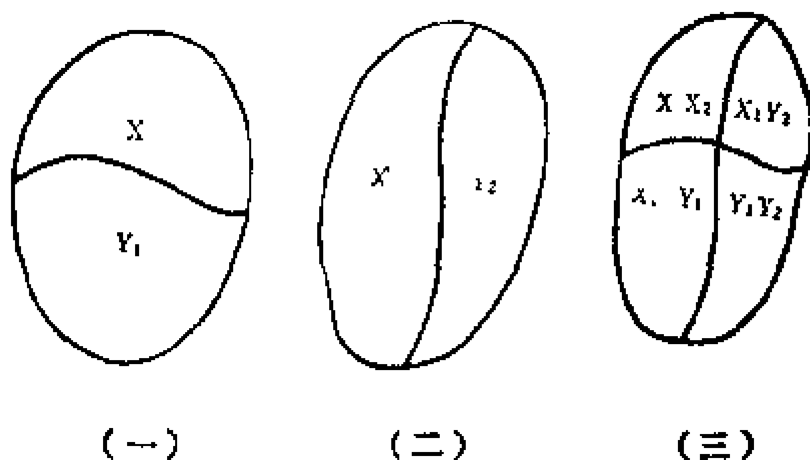
证 命二余圈是$\omega[X_1, Y_1]$，$\omega_2[X_2, Y_2]$，其中

$X_1, Y_1, X_2, Y_2 \neq \varnothing$，$X_1 \cap Y_1=\varnothing$，

$X_2 \cap Y_2=\varnothing$，

$X_1 \cup Y_1=X_2 \cup Y_2=X$，

X_1、X_2、Y_1、Y_2将分整个X为四部分（见图3.7）：X_1X_2，X_1Y_2，Y_1X_2，Y_1Y_2（为使记号简单，以下用AB表示二集合A与B的交集$A \cap B$）。图$G=(X, E)$的任一边，其二顶所在位置将有16种可能性（计及重复）。$\omega_1 \oplus \omega_2$的边在ω_1里或在ω_2里，但不能同时在ω_1与ω_2里。



（一）　　（二）　　（三）

图 3.7

ω_1中的边，其二顶所在位置有四种可能性：

X_1X_2，Y_1X_2；X_1Y_2，Y_1Y_2；X_1X_2，Y_1Y_2；X_1Y_2，Y_1X_2。

同样，ω_2中的边其二顶所在位置，也有四种可能性：

X_1X_2，X_1Y_2；Y_1X_2，Y_1Y_2；X_1X_2，Y_1Y_2；X_1Y_2，Y_1X_2。

故$\omega_1 \oplus \omega_2$中的边其二顶所在位置，仅有下列四种可能性：

X_1X_2, Y_1X_2; X_1Y_2, Y_1Y_2; X_1X_2, X_1Y_2; Y_1X_2, Y_1Y_2。

由此可见，$\omega_1 \oplus \omega_2$中的边，其端顶分别在

$X_1X_2 \cup Y_1Y_2$与$X_1Y_2 \cup Y_1X_2$内。又

$X_1X_2 \cup Y_1Y_2 \neq \varnothing$，$X_1Y_2 \cup Y_1X_2 \neq \varnothing$，

$(X_1X_2 \cup Y_1Y_2) \cap (X_1Y_2 \cup Y_1X_2) = \varnothing$，

$(X_1X_2 \cup Y_1Y_2) \cup (X_1Y_2 \cup Y_1X_2) = X$。

因若$X_1X_2 \cup Y_1Y_2 = \varnothing$将导致$X_1X_2 = Y_1Y_2 = \varnothing$，此时$\omega_1$与$\omega_2$将是同一余圈。因而$\omega_1 \oplus \omega_2 = \varnothing$，这是$\varnothing$—余圈。同样，$X_1Y_2 \cup Y_1X_2 = \varnothing$也导致$\omega_1 \oplus \omega_2 = \varnothing$。故

$$\omega_1 \oplus \omega_2 = \omega\,[X_1X_2 \cup Y_1Y_2,\ X_1Y_2 \cup Y_1X_2]。$$

（证毕）

定理3.4 任一余圈是边互质的初级余圈之和。

证 设所给余圈是$\omega\,[X_1, X_2]$，命子图G_{X_1}的联接分子图是$G_{X_{11}}$，$G_{X_{12}}$，…，$G_{X_{1k}}$，则

$\omega\,[X_1, X_2] = \omega\,[X_{11}, X_2] \oplus \omega\,[X_{12}, X_2] \oplus \cdots \oplus \omega\,[X_{1k}, X_2]$，

余圈$\omega\,[X_{11}, X_2]$，$\omega\,[X_{12}, X_2]$，…，$\omega\,[X_{1k}, X_2]$等是边互质的。

设包含X_2，X_{1i}的联接分子图是G_C，命含$C-X_{1i}$的联接分子图是G_{C1}，G_{C2}，…，则

$\omega\,[X_{1i}, X_2] = \omega\,[X_{1i}, C_1] \oplus \omega\,[X_{1i}, C_2] \oplus \cdots \oplus \omega\,[X_{1i}, C_j] \oplus \cdots$

由于$C = X_{1i} \cup C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_j \cup \cdots$

$= C_j \cup (X_{1i} \cup C_1 \cup \cdots)$

C_j和$X_{1i} \cup C_1 \cup \cdots$都是联接的，且两两点互质（即彼此无公共点），而其合是C，也是联接的，据定义知$\omega\,[X_{1i}, C_j]$是初级的，参看图3.8，且$\omega\,[X_{1i}, C_j]$等两两边互质。

（证毕）

§4 向量空间

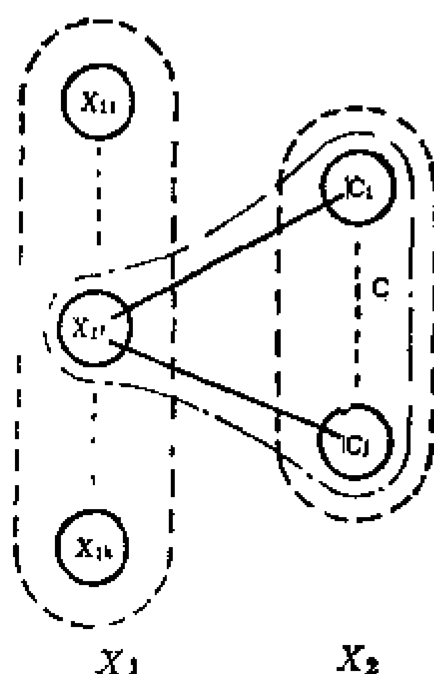


图 3.8

给出m维向量ε $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m)$其中$\varepsilon_i = 0$或1共有$2^m$个这样的向量。若其每个元素都是0，则称之为∅—向量。

二向量

$\varepsilon_1 = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \cdots, \varepsilon_{1i}, \cdots, \varepsilon_{1m})$,

$\varepsilon_2 = (\varepsilon_{21}, \varepsilon_{22}, \cdots, \varepsilon_{2i}, \cdots, \varepsilon_{2m})$

的环和记作$\varepsilon_1 \oplus \varepsilon_2$，它是将二向量的相应元素相加（模2），故这样的二个m维向量的环和

$$\varepsilon_1 \oplus \varepsilon_2$$

仍是这样的一个m维向量。

在环和⊕运算下，所有的2^m个m维向量构成一个加法群，其单位元素是∅—向量，每个向量的逆元素是其本身。

取数域{0，1}作为系数域，则所有的2^m个这样的m维向量，在环和运算⊕之下构成一个m维向量空间，其维数是m。$e_i = (0, \cdots, 1, 0, \cdots, 0)$，其第$i$个元素是1，其他元素都是0（$i = 1, 2, \cdots, m$）构成这个向量空间的一个基底。

设有向量$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_k$，若存在一组数$(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k) \neq (0, 0, \cdots, 0)$使

$$\sum_{1}^{k} \lambda_i \varepsilon_i = \varnothing,$$

则这组向量称为**线性相关的**。若二向量ε_1与ε_2的数量积$\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2$

$=0$（模2），则称此二向量**相互正交**。现在将上面引进的概念应用到图上来。

已给无向图$G=(X, E)$（可以假定这个图无环），将其n个顶标号为$x_1, x_2, \cdots, x_n$，m条边标号为$e_1, e_2, \cdots, e_m$，作m维向量

$$\varepsilon=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m),$$

其中 $\varepsilon_i=0$或1，

这个向量实际上代表图G的一个部分图，同样用ε表示。当向量ε中元素$\varepsilon_i=1$时，表示部分图ε含边e_i，否则当$\varepsilon_i=0$时，部分图ε则不含边e_i。如上所言，这2^m个m维向量在环和运算$\oplus$之下，取{0，1}为系数域，构成一个m维向量空间。

定理3.5 无环图$G=(X, E)$其所有的圈（包括广义圈）加上$\varnothing$-圈构成一个**向量子空间**。

证 据定理3.1与3.2，这个定理是显然的。 （证毕）

这个子空间简称为**圈空间**。同样据定理3.3和3.4也有

定理3.6 无环图$G=(X, E)$，其所有的余圈加上$\varnothing$—余圈构成一个向量子空间。

下节将研究这些向量子空间的基底如何确定，它们的维各是什么。

§5 圈维数

在上章我们讲过无环联接图$G=(X, E)$的跨顶树T和与T相联系的余树T_c。跨顶树共含$n-1$条边，余树T_c则含$m-n+1$条边。在T_c中任取一边e加进跨顶树T内，得图$T+e$，其中含唯一一个初级圈（第二章定理2.6）。故与任一跨顶树T相应的共有$m-n+1$个初级圈。这些初级圈两两各至少有一边不同。按上节m维向量的概念，这些圈必线性无关。于是有

定理3.7 圈空间的维数$\geq m-n+1$。

圈空间的维数记作$\nu(G)$。这个定理就是：在无环联接图G里$\nu(G)\geqslant m-n+1$。

同样，取跨顶树T的任一边e加进相应的余树T_c得部分图T_c+e，则有

定理3.8 无环联接图$G=(X,E)$，设T是其跨顶树，T_c是相应的余树。在T上任取一边e加进T_c，则部分图T_c+e中将含一个且仅一个初级余圈。

证 （1）在跨顶树T上任取一边e后，树被截断，其n个顶划分成二部分X_1与X_2，二部分各有顶且无公共顶，合起来是顶集X。X_1与X_2之间的联边本有一部分含在T_c内，仅赖于边e将此二者相联。现取e加进T_c，便得一个余圈。

（2）子图G_{X_1}与G_{X_2}各含树T的一个联接部分，故G_{X_1}与G_{X_2}是联接的，据定义，这个余圈是初级的。

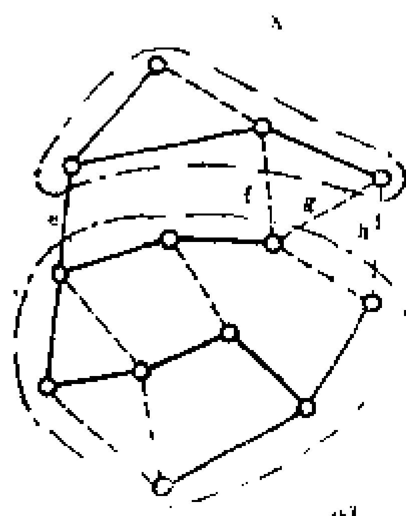


图 3.9

（3）若有二个初级余圈含在T_c+e内，且均含e，则此二余圈的环和将不含边e。X_1与X_2将互相联接，环和不成余圈。这与定理3.3矛盾。

（证毕）

在图3.9中实线边组表示跨顶树T，虚线边组表示相应的余树T_c。将边e自T去掉，加进T_c，其中包含初级余圈

$$\omega[X_1, X_2]=\{e, f, g, h\},$$

推理3.8a 设无环联接图$G=(X,E)$的余圈子空间的维数记为$\mu(G)$，则$\mu(G)\geqslant n-1$。

证 跨顶树T共含$n-1$条边，共有$n-1$个相应的初级余圈，而这些余圈又两两各有一边互不相同，这$n-1$个初级余圈应相互独立。（证毕）

定理3.9 无环联接图$G=(X,E)$上任一初级圈和任一初级余圈是相互正交的。

证 设初级圈为μ，初级余圈为μ_c。μ是联接的，μ_c则分截顶集X为二子集X_1与X_2：

$$X_1,\ X_2 \neq \varnothing,\ X_1 \cap X_2 = \varnothing,\ X_1 \cup X_2 = X$$

若μ与μ_c无公共边，即μ的边全含在X_1或X_2内，则与μ和μ_c相应的两个m维向量其数量积为$\mu \cdot \mu_c = 0$。

若μ与μ_c有公共边，由于μ是联接的，当μ沿μ_c的一边自X_1走向X_2，必再沿μ_c的另一边自X_2走回X_1。亦即当μ与μ_c有公共边时，公共边必成对出现。取二者的数量积模2，结果必为0。亦即$\mu \cdot \mu_c \equiv 0$（模2）。

定理3.10 无环联接图G的圈维数是$\nu(G)=m-n+1$，余圈维数是$\mu(G)=n-1$。

证 圈空间与余圈空间都是整个m维空间的子空间。又据定理3.7及推理3.8a，有

$$m \geqslant \nu(G)+\mu(G) \geqslant m-n+1+n-1=m$$

故 $\nu(G)=m-n+1$，$\mu(G)=n-1$。（证毕）

推理3.10a 无环联接图$G=(X,E)$，任取跨顶树T，其相应的余树设为T_c，则在T_c中每次取边e加进T，所得到的$m-n+1$个初级圈构成圈空间的一个基底。将T中每一边e加进余树T_c，所得到的$n-1$个初级余圈构成余圈空间的一个基底。

推理2.10b 无环图$G=(X,E)$具n个顶、m条边、p个联接的分子图，则圈维数是

$$\nu(G)=m-n+p$$

推理3.10c 无环图$G=(X,E)$具n个顶、m条边、p个联接的分子图，则余圈维数是

$$\mu(G)=n-p。$$

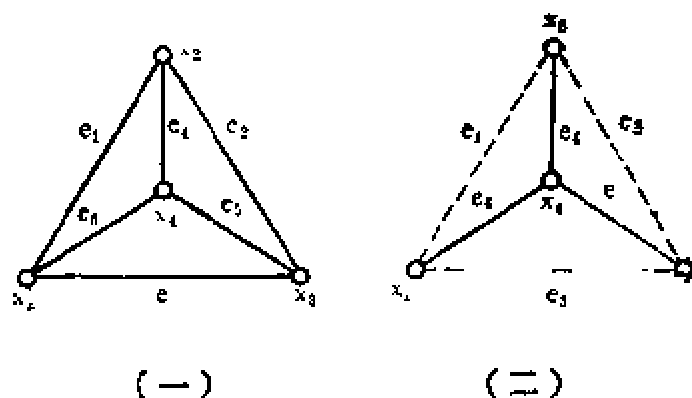
推理3.10d 无环图$G=(X,E)$共有$2^{\nu(G)}$个圈，其中包含$\varnothing$—圈。图G共有$2^{\mu(G)}$个余圈，其中包含$\varnothing$-余圈。

证 基底圈的个数是$\nu(G)$，这些圈的任意线性组合都是圈（定理3.2）。在组合中，每个圈取或不取，共有$2^{\nu(G)}$个方法。全不取便是$\varnothing$圈。我们把$\varnothing$—圈也看作是一个圈。

同理可证推理的第二部分。 （证毕）

§6 圈的矩阵表示

以上所讲的圈、余圈、跨顶树和相关的余树都是图$G=(X, E)$的部分图。每个这样的部分图都可写成一个m维向量（设图G具n个顶、m条边）。譬如图3.10，其顶边结合矩阵是$n\times m$型：



（一） （二）

图 3.10

$$M=\begin{array}{cc} \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} \end{array}$$

跨顶树$T=(X, \{e_4, e_5, e_6\})$的顶边结合矩阵是

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} e_4 & e_5 & e_6 \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} \end{array}$$

以e_1、e_2、e_3为边的那些圈μ^1、μ^2、μ^3构成圈的一个基底，写成m维向量便是：

$$\mu^1=(1,0,0,1,0,1),$$
$$\mu^2=(0,1,0,1,1,0),$$
$$\mu^3=(0,0,1,0,1,1).$$

写出它们与边的结合矩阵（圈边结合矩阵）便是：

$$M_\mu=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix}\mu^1\\ \mu^2\\ \mu^3\end{matrix}$$

（列依次对应 e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6）

与跨顶树T相应的余树T_c写成m维向量是：

$$Tc=(1,1,1,0,0,0),$$

与树T相应的余圈写成m维向量是：

$$\mu_c^1=(1,0,1,0,0,1),$$
$$\mu_c^2=(1,1,0,1,0,0),$$
$$\mu_c^3=(0,1,1,0,1,0),$$

写出它们与边的结合矩阵（余圈边结合矩阵）：

$$M_{\mu_c}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix}\mu_c^1\\ \mu_c^2\\ \mu_c^3\end{matrix}$$

（列依次对应 e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6）

在圈边结合矩阵里，我们可注意到它是$\nu(G)\times m$型的，且其首$\nu\times\nu$型子矩阵是一个ν阶单位矩阵，这总是可能的。任取一个跨顶树T，然后把与树T相应的余树T_c里的边重新编号为e_1，e_2，…，e_ν. 相应圈边结合矩阵便成这个形式。

圈边结合矩阵的每一行代表一个圈，构成圈底。将这些行所有的线性组合（环和）共$2^3=8$个都写出来，附在这个矩阵

的下面，扩大成$2^r \times m$型，得矩阵$M_{\mu(a)}$：

$$M_{\mu(a)}=\begin{array}{c} \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{matrix} \\ \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right] \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \end{array}$$

这是图G里全部圈边结合矩阵。每行代表一个圈。

同样，图G里全部余圈边结合矩阵（余圈共$2^3=8$个）是$M_{\mu_c(a)}$：

$$M_{\mu_c(a)}=\begin{array}{c} \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{matrix} \\ \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right] \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \end{array}$$

定理3.11　含n顶、$n-1$条边的无环图$G=(X,E)$成树，其充分和必要条件是其顶边结合矩阵的秩为$n-1$。

证　*必要性*　设G是树，则G必是联接的，其每个顶上的边构成一个余圈。图共含$n-1$个独立的余圈，成为余圈子空间的底。在这个$n\times(n-1)$型的顶边结合矩阵中，必含$n-1$个独立的行，故这个矩阵的秩是$n-1$。实际上，顶边结合矩阵

的每列只含两个非零元素1。在环和之下，这n行线性相关，每行都线性相关于其他$n-1$行。由此知，每$n-1$行都是线性无关的。否则线性无关的行的个数将不超过$n-2$，因而结合矩阵的秩将不超过$n-2$，这不可能。

充分性 反之，设顶边结合矩阵的秩是$n-1$，其中必含$n-1$个相互独立的行。每行是一个余圈，这个图必含$n-1$个独立的余圈，因而这个图必是联接的。否则余圈底的维将小于$n-1$，这是矛盾（推理3.10$_c$）。图G含n顶、$n-1$边，而又是联接的，故图G是树（定理2.3）。（证毕）

上定理可推广到一般情况。

定理3.12 含n顶、m边的无环联接图$G=(X, E)$，其顶边结合矩阵M是$n-1$秩的。其中任意$n-1$个列相对应的$n-1$边构成一个跨顶树，当且仅当这$n-1$个列线性无关，亦即其相应的$n-1$阶子行列式$\neq 0$（模2）。

证 无环联接图$G=(X, E)$，含n顶、m边，恒有跨顶树（定理2.5）。这个跨顶树所赖以构成的$n-1$条边在结合矩阵中对应的$n-1$列必互相独立（定理3.11），故顶边结合矩阵M其秩不小于$n-1$。但M的每行含二非零元素1，在环和运算下，这些行是线性相关的。故结合矩阵M的秩恰是$n-1$。据定理3.11，本定理的第二部分是显然的。

最后，设T是G的一个跨顶树，则T含$n-1$条边。将往证在这$n-1$条边所对应的M中的$n-1$个列中，任除去一行后所余下的$(n-1)$阶子行列式之值是$+1$，因而$\neq 0$（模2）。

不妨设在T的边所对应的$n-1$列组成的子矩阵中除去点x_n所对应的行后得到一个$n-1$阶子行列式。对G中的点重新标号如下：任取一个T的悬挂点$(\neq x_n)$标为x'_1，所关联的边标为e'_1。然后在由T除去点x'_1、边e'_1后余下的图中再取一个悬挂点$(\neq x_n)$标为x'_2，所关联的边标为e'_2。这样每次取一个悬挂点及其所关联的边依次排序，直到标出点x'_{n-1}、边e'_{n-1}为

止。这种点、边的新标号方式意味着对T原有之顶边结合矩阵进行行列交换，只会导致行列式改变符号。而最后依标号$x'_1, x'_2, \cdots, x'_{n-1}$及$e'_1, e'_2, \cdots, e'_{n-1}$所写出之顶边结合矩阵显然是一个三角形矩阵。其上三角形元素全为0，主对角线元素全为1，因而，其行列式的值为1。故原来矩阵M中，T所对应的$n-1$个列中所含的$(n-1)$阶子行列式之值是± 1，即$\neq 0$（模2）。　　　　（证毕）

无环联接图$G=(X, E)$的顶边结合矩阵M是$(n-1)$秩的，其每$n-1$行都线性无关。因此，在一般计算中，可以任意抹去一行，写成一个$(n-1)\times m$型矩阵，称为**顶边结合的简化矩阵**，记作M_R。这个矩阵的每一行表示该行所代表的那个顶上的余圈，这些余圈构成图G余圈子空间的底。例如，图3.10的顶边结合简化矩阵是：

$$M_R = \begin{array}{cccccc|c} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & x_4 \\ \multicolumn{3}{c}{m-n+1} & \multicolumn{3}{c}{n-1} & \end{array}$$

M_R的后三列代表跨顶树$T=\{e_4, e_5, e_6\}$，前三列代表相应的余树T_c。将e_4加进T_c，其中$\{e_1, e_2, e_4\}$便是一个余圈，这就是与x_2相应的那一行。同样，与x_3，x_4对应的那两行也是两个余圈。读者不难验证，在T_c中任取一列加到T里，总有一个$(n-1)\times(n-1)$的子行列式，其列线性相关，表示这些边所构成的那个部分图是一个圈。

只需自简化的顶边结合矩阵中找到$n-1$个相互独立的列，则这些列所代表的边便构成一个跨顶树。反之，任何跨顶树都可在这个简化的顶边结合矩阵中找到。于是有

推理3.12a 无环联接图$G=(X, E)$里跨顶树的个数，等于其简化的顶边结合矩阵中其列线性无关的$(n-1)$阶子行式列的个数。

证 取简化的顶边结合矩阵为

$$M_R=\begin{pmatrix} & e_1 \ e_2 \ \cdots e_m & \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & 0\text{或}1 & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix}$$

据定理3.12甚易导出本推理。 （证毕）

§7 数 树

本节将研究在无环无向图$G=(X, E)$里跨顶树的个数。

设已给无环联接图$G=(X, E)$，将其边任意定向便得无环联接有向图$G=(X, U)$，后者的顶弧结合矩阵是：

$$\overline{M}=\begin{pmatrix} u_1 \ u_2 \ \cdots u_m \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots(-1)\cdots(+1)\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{pmatrix}\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{matrix}$$

这个矩阵是$n\times m$型的，其每列有二非零元素，一个是$+1$，一个是-1。显见，这是一个全单模矩阵。[①] 相应的无向图$G=(X, E)$的顶边结合矩阵是：

$$M=\begin{pmatrix} e_1 \ e_2 \ \cdots e_m \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots(+1)\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{pmatrix}\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix}$$

$\overline{M}$的得来，是在M里将每列上的某一个$+1$改成-1。简化的结合矩阵（撤去第一行）$\overline{M}_R$与M_R有同样的关系，且$\overline{M}_R$仍旧

①所谓全单模矩阵，就是该矩阵里任一子矩阵之行列式之值是0、-1或$+1$。

是一个全单模矩阵。于此有

引理3.3 在简化结合矩阵$\overline{M}_R$中，任一$(n-1)$阶子行列式$\overline{D}_{n-1}=0$的充分和必要条件是其在M_R中相应的$(n-1)$阶子行列式$D_{n-1}\equiv 0$（模2）。

证 在任一个数字算式中，将某一项改号（即由正改负或由负改正），其结果是（模2）相等的。又在一个行列式中，将某个元素改号，无非是在其展开式中将某些项改号，结果是（模2）相等的。

设$\overline{D}_{n-1}=0$，在$\overline{D}_{n-1}$中将所有的元素-1改为+1，将有：

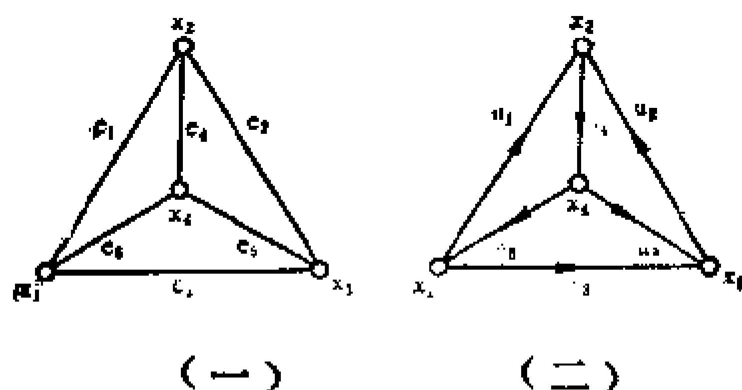
$$0=\overline{D}_{n-1}\equiv\cdots\equiv D_{n-1}\text{（模2）。}$$

反之，在D_{n-1}的每一列上逐次将一个+1改成-1便有：

$$D_{n-1}\equiv\cdots\equiv\overline{D}_{n-1}\text{（模2）。}$$

但因$\overline{M}_R$是全单模矩阵，任一$(n-1)$阶子行列式之值是0、-1或+1。故当$D_{n-1}\equiv 0$（模2）时必有$\overline{D}_{n-1}=0$。（证毕）

在无环联接有向图$G=(X,U)$中，它的圈、余圈、跨顶树等等，都和它的底图无向图$G=(X,E)$里的相应部分图一一相应。不过，在这个时候，将其写成m维向量的形式时，向量中的元素在图的边的方向确定之后，有些是+1，有些是-1。例如图3.11相应的结合矩阵是：



（一）　　　　（二）

图 3 11

$$
M=\begin{array}{c} \\ \left(\begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array}\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array}
$$

与

$$
\overline{M}=\left(\begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ +1 & 0 & +1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & +1 & +1 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array}
$$

相应的简化结合矩阵是:

$$
M_R\left(\begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array}
$$

与

$$
\overline{M}_R=\left(\begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ -1 & -1 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & +1 & +1 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array}
$$

在有向图（图3.11的(2)）中，（$x_1u_1x_2u_4x_4u_6x_1$）构成一个圈。若取这个圈的总方向为顺时针方向，则表示这个圈的那个向量便是（+1，0，0，+1，0，+1），若取逆时针方向为这个圈的总方向，则这个圈的相应向量便是(-1，0，0，-1，0，-1）。同样，取顶x_1上的余圈的总方向是自x_1到其他各顶的，即取这个余圈为$\omega[x_1,\ \{x_2,\ x_3,\ x_4\}]$，其相应的向量是（+1，0，+1，0，0，-1）。反之，则相应的向量是（-1，0，-1，0，0，+1）。又{u_1，u_2，u_6}构成一个跨顶树，取$u_1\to u_2\to u_6$为其总方向，其相应向量是（+1,-1,0,0,-1，0）。

相反，则得向量（1，+1，0，0，+1，0）。读者不难举出类似的例。

定理3.13 无环联接有向图G（X，U）里，跨顶树的个数等于其简化结合矩阵$\bar{M}_R$里异于0的（$n-1$）阶子行列式的个数。

证 由于在这里引用的运算是环和⊕，系数域{0，1}（模2），故引用推理3.12和引理3.3便可推得本定理。

（证毕）

定理3.14 无环联接图G（X，E）的跨顶树的个数等于$|\overline{M}_R \cdot \overline{M}'_R|$，其中$\overline{M}'_R$是$M_R$的转置矩阵。

证 据上定理，无向图的跨顶树和其相应的有向图的跨顶树是一一对应的。又据引理3.1及矩阵论里一个定理$|\overline{M}'_R \cdot \overline{M}'_R|$等于$\overline{M}_R$中所有异于0的($n-1$)阶子行列式的值的平方和。$\overline{M}_R$中每一个异于0的（$n-1$）阶子行列式其值是+1或-1。故定理得证（这里的运算，又回到平常的运算）。

（证毕）

例如图3.11的（二），其

$$M_R=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & +1 & +1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{M}'_R=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ +1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & +1 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}$$

$$|\overline{M}_R \cdot \overline{M}'_R| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 16$$

图3.11的（一）是一个K_4，由以上计算知K_4的跨顶树共有16个。这16个跨顶树在图3.12中绘出。

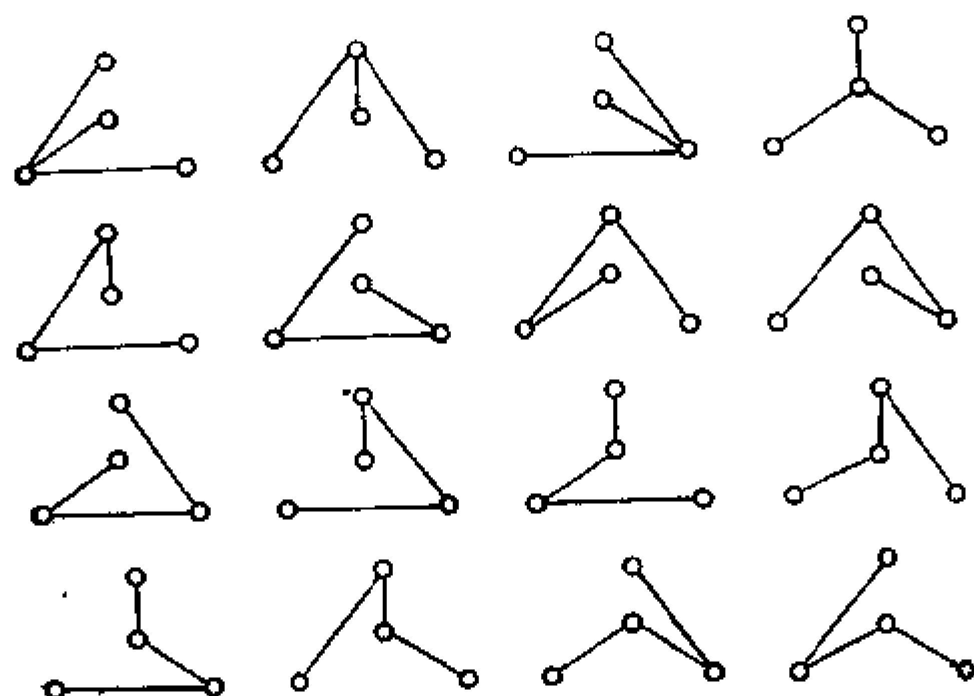


图 3.12

推理3.14： K_n的跨顶树的个数是n^{n-2}。

证 将K_n的边任意定向，变成有向图K_n，其简化的顶弧结合矩阵M_P是$(n-1)\times C_n^2$型。每行含$(n-1)$个非零元素（+1或-1）。每列最多含二非零元素（若只含一个非0元素，则这个元素是+1或-1。若含二非零元素，则一个是+1，一个是-1），且每二行只有一列有二非零元素，一个是+1，一个是-1（Kn 是单纯图，每二点之间有一条弧，且仅有一条弧）。故

$$\left|\overline{M}_R \cdot \overline{M}_R'\right| = \begin{vmatrix} n-1 & & & \\ & n-1 & & (-1) \\ (-1) & & \ddots & \\ & & & n-1 \end{vmatrix}$$

主对角线上的元素全是$n-1$，主对角线上下二侧的元素均为-1。将各列加到第一列上去，再将第一列分别加到其他各列，行列式变为：

$$\begin{vmatrix} 1 & & & & \\ 1 & n & & (0) & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & (0) & & \ddots & \\ 1 & & & & n \end{vmatrix} = n^{n-2}$$

（证毕）

这里讲了无向图里跨顶树的个数的计算。以下我们还要讲一讲有向图里跨顶树形图的个数的计算。

在（无环联接）有向图$G=(X, U)$中，我们可以就其带方向的相邻矩阵，来研究它的一些性质。

设$d_G^+(x_i, x_j) \neq 0$，称x_i到x_j是**相通的**。若$d_G^+(x_i, x_j) = 0$，则称x_i到x_j是**不相通的**。

$\sum_{i \neq j} d_G^+(x_i, x_j) = k$ 表示共有k条弧以x_j为终点，亦即

$d_G^-(x_j) = k$。

作矩阵 $A = (a_j^i)$

其中 $a_j^i = d_G^+(x_i, x_j)$

如图无环，则$a_i^i = 0$，对一切i均成立。以下假定所讲的图都无环。

再作矩阵 $D = (d_j^i)$

其中
$$d_j^i = \begin{cases} 0 & 当 i \neq j 时 \\ d_G^-(x_j) & 当 i = j 时 \end{cases}$$

自矩阵D减去矩阵A，得

$$D - A = \begin{pmatrix} d_G^-(x_1) & -a_2^1 \cdots\cdots & -a_n^1 \\ -a_1^2 & d_G^-(x_2) \cdots\cdots & -a_n^2 \\ -a_1^3 & -a_1^3 \quad d_G^-(x_3) \cdots\cdots & \\ & \ddots & \\ -a_1^n & -a_2^n \cdots\cdots & d_G^-(x_n) \end{pmatrix},$$

实际上这个矩阵的每一行与每一列都对应于有向图的一个顶。主对角线上的数表示每个顶的入次。各列上的其他元素，其绝对值表示其他各顶到该顶的弧的条数；各行上的其他各数，其绝对值表示该顶到其他各顶的弧数。

去掉这个矩阵的第一行与第一列得（$n-1$）阶子矩阵，记其行列式为Δ_1：

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} d_G^-(x_2) & -a_3^2\cdots\cdots\cdots\cdots & -a_n^2 \\ -a_2^3 & d_G^-(x_3)\cdots\cdots & -a_n^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_2^n & -a_3^n\cdots\cdots\cdots\cdots & d_G^-(x_n) \end{vmatrix}$$

例 图3.11（二）是一个无环的有向图，其相应的矩阵如下：

$$D-A=\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} \end{array}$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=3$$

定理3.15 已给n个顶、$n-1$条边、无环的有向图$G=(X, U)$，图G是以x_1为根的树形图，其充分和必要条件是$\Delta_1=1$。

证 必要性 设G是以x_1为根的树形图，则$d_G^-(x_1)=0$，$d_G^-(x_i)=1$（$i\neq 1$）（定理2.8）。假定将G的顶编号，使每条弧的两个端点其下标都是自小到大，于是和这个有向图相应的

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 1 & (-1) & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & 1 \end{vmatrix} = +1$$

充分性 设$\Delta_1 = 1$。Δ_1的每个行至少将含一个+1。否则Δ_1含0行，Δ_1将为0，这是矛盾。由此知每个顶x_k（$k \neq 1$）将至少是一条弧的终点。但原给的有向图仅有（$n-1$）条弧，故

$$d_G^-(x_1) = 0, \quad d_G^-(x_i) = 1 \quad (i \neq 1)$$

往证图G不能有圈，否则在Δ_1中圈上的顶点所对应的那个子行列式将可改变成下列形式：

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & & & & \\ & & & (0) & & \\ & 1 & -1 & & & \\ & & 1 & & & \\ & (0) & & 1 & 1 & \\ -1 & & & & 1 & \end{vmatrix} = 0$$

Δ_1可改变成下列形式：

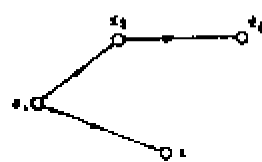
$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \cdots\cdots(0)\cdots\cdots \\ C \\ \cdots\cdots(0)\cdots\cdots \end{vmatrix}$$

于是$\Delta_1 = 0$，这是矛盾。

这个有向图$G = (X, U)$，n个顶，（$n-1$）条边，无环，无圈，且$d_G^-(x_1) = 0$，$d_G^-x_i = 1$（$i \neq 1$），据定理2.8，G是一个以x_1为根的树形图。 （证毕）

例 图3.13中的（一）是一个以x_1为根的树形图，（二）则不是。关于图3.13（一）的

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$



（一）

但图3.13的（二）的

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

（二）

图 3.13

定理3.16 （Tutte [1948]）设$G=(X,U)$是无环有向图，则Δ_1等于G里以x_1为根的树形图的个数。

证 写出图G的Δ_1，将Δ_1看作一种算子作用在$n-1$个列向量上，则Δ_1可以写成

$$\begin{aligned} &\Delta_1(a_2, a_3, \cdots, a_n) \\ &= \Delta_1\Big(\sum_{k_2 \neq 2} a_2^{k_2} e_{k_2}, \sum_{k_3 \neq 3} a_3^{k_3} e_{k_3}, \cdots, \\ &\qquad \sum_{k_n \neq n} a_n^{k_n} e_{k_n}\Big) \\ &= \sum_{k_2, k_3, \cdots, k_n} a_2^{k_2} a_3^{k_3} \cdots a_n^{k_n} \Delta_1(e_{k_2}, e_{k_3}, \cdots, e_{k_n}) \end{aligned}$$

其中e_{k_i}是单位列向量（即n维列向量，其第k_i个元素为1，其他元素皆为0）。现在

$$\Delta_1\left(e_{k_2}, e_{k_3}, \cdots, e_{k_n}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & (-) & \\ & & 1 & & \\ & (-) & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{vmatrix}$$

其中主对角线上的元素都是1，另外，每行在第k位置（$k_j \neq j$）

的元素是-1，这个行列式所对应的原图G的那个部分图共含($n-1$)条弧

$$(x_{k_2},x_2),\ (x_{k_3},x_3),\ \cdots,\ (x_{k_n},x_n)$$

据定理3.15　　$\Delta_1(e_{k_2},e_{k_3},\cdots,e_{k_n})=1$。

当且仅当这个部分图是原图G的以x_1为根的树形图。（证毕）

例　图3.11（二）中以x_1为根的树形图共有

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}2 & 0 & -1\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}=3\text{个}$$

其形如图3.14所示。

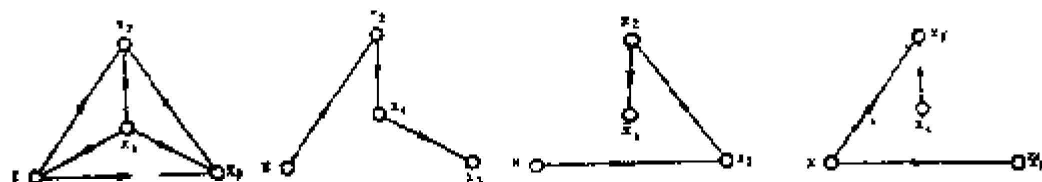


图 3.14

推理3.16。任给无环联接图$G=(X,E)$，n个顶、m条边，作矩阵

$$B=(b_j^i)\ (i,j=1,2,\cdots,n)$$

其中
$$b_j^i=\begin{cases}d_G(x_i) & \text{当}i=j\text{时}\\ -1 & \text{当}i\neq j\quad [x_i,x_j]\in E\text{时}\\ 0 & \text{当}i\neq j\quad [x_i,x_j]\notin E\text{时}\end{cases}$$

则图G里跨顶树的个数等于矩阵B里任一主子行列式的值。

证　将图G的每条边(x_i,x_j)定为正反两个方向的弧(x_i,x_j)与(x_j,x_i)，则无向图G变为有向图G^*，G中的每个跨顶树都可以看做是图G^*里取任一顶为根的树形图。据定理3.16便得证。

（证毕）

例 仍取图3.11的（一）为例。相应的

$$B=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

其任一主子行列式是

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 16$$

习 题

1．下列一笔画问题是否可解？如可以，试描述其画法。

2．边数为奇数，顶数为偶数的尤拉图可能存在吗？为什么？

3．试证明：如果图$G=(X,E)$中每点的次数均为偶数，则存在边互质的初级圈$C_1, C_2, \cdots, C_n$，使有 $E(G)=E(C_1)\cup E(C_2)\cup\cdots\cup E(C_n)$.

4．试证明 如果联结图$G=(X,E)$有$2k$个顶是奇数次的，则G中有k条边互质的简单链（即链中每条边仅出现一次）$Q_1,\cdots,Q_k$，使有：$E(G)=E(Q_1)\cup E(Q_2)\cup\cdots\cup E(Q_k)$

5．在下图中找出一个尤拉回路。

6、将一个圆周分成m等分，每一份上标记以0或1的使得任何相继k个数的有序组（依同一方向）都不相同。问对于固定的k，最多m可取值为多少？

7、试举例说明：两个初级圈的环和可能是，（1）一个初级圈，（2）2个初级圈；（3）3个初级圈及若干(>3)个初级圈。

8、试举例说明：两个初级链的环和可能是：（1）一棵树，（2）一个初级圈；（3）2个及2个以上的初级圈。

9、试说明，一个单纯图G的二个不同的跨顶树的环和、不一定是一个跨顶树。

10、设单纯图$G=(X, E)$是联接的，$|X|=n$，试证明：至少G存在（$n-1$）个不同的初级余圈。

11、试证明：如果联接的单纯图$G=(X, E)$的每点的次数均为偶数，则G的任一个初级余圈所含的边不止一条。

12、试证明：如果联接的单纯图$G=(X, E)$的每点的次数均为k（$k\geq 2$），且G中不含长度为奇数的初级圈，则G的任一个初级余圈所含的边不止一条。

13、试证明：任一个初级圈与一初级余圈的交集为偶数条边（包含空集）。

14、试证明：任一图G的每一条边均属于某个初级余圈。

15、试证明：如果图G是树，则其每一条边均是一个初级余圈，而且存在一个余圈包含所有的边。

16、试证明：如果联结图G的每一条边均是一个初级余圈，则G是树。但如果G中存在一个余圈包含所有的边，则G不一定是树。

17、试证明：取{0，1}为系数域，如果圈C是圈C_1与圈C_2的环和，则对应的圈向量线性相关。如果余圈W是余圈W_1与余圈W_2的环和，则对应的余圈向量线性相关。

18、试证明：环和运算满足交换律、结合律。

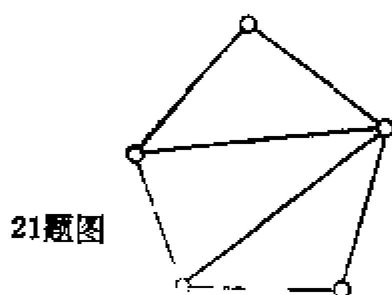
19、设已知一组独立的（彼此不同的）圈（余圈）$C_1, C_2, \cdots, C_n$，对应的向量是$e_1, e_2, \cdots, e_n$。试证明，$C=C_1 \oplus C_2 \oplus \cdots \oplus C_n$所对应的向量是：

$$e=\sum_{i=1}^{n} e$$

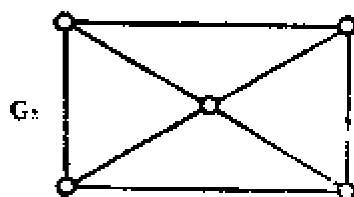
20、试直接证明：在一个单纯联接图G中任取一个跨顶树T，利用余树T_c中的边$e_1, e_2, \cdots, e_{m-n+1}$分别补入$T$中得图$T \cup e_i$，从而得出一组初级圈$C_1, C_2, \cdots, C_{m-n+1}$，图$G$中任一个圈均是这些初级圈的环和。

21、求出下图的所有的圈及余圈，并且找出其所有的圈基，其余圈基共有几种？

22、在下图G中任选一个初级圈C_1。在图中任除去一条C_1中的边后在余下的图中再任选一个初级圈C_2。再从图中任除去C_2中的一条边，再在余下的图中任选



21题图



22题图

一个初级圈C_3。然后再任除去C_3中的一条边，在余下的图中选一个初级圈C_4。试证C_1、C_2、C_3、C_4形成一个圈空间的基底。

23 应用22题的思想于一般联接的单纯图G，证明这样得到的初级圈C_1，C_2，…，C_{m-n+1}形成一个圈空间的基底。

24 试证明：n个顶点，$n-1$条边的单纯图是一个树，当且仅当，其余圈空间的维数是$n-1$。

25、试直接证明：在一个单纯联接图G中任取一个跨顶树T，从而得到一个余树Tc。由取树T中的边e加入Tc、在图$Tc\cup e$中得到一个初级余圈的办法，一共可得到$n-1$个初级余圈B_1、B_2、…、B_{n-1}，它们形成余圈空间的一个基底。

26、试证明：具n个顶点的联接图G的余圈空间的不同基底的个数是：

$$N=\prod_{i=1}^{n-1}\left(2^{n-1}-2^{i-1}\right)\Big/(n-1)!$$

27、已知顶边简化结合矩阵是

$$M_R=\begin{pmatrix}1&0&1&0&0&1\\0&1&0&1&0&1\\1&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0\end{pmatrix}$$

试作出该图G。

28、已知图G的圈基与边的结合矩阵为

$$M_\mu=\begin{pmatrix}1&1&0&1&0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0&1&0&1&1\\1&1&1&0&0&1&0&0&0\\0&0&1&1&1&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

试作出图G。

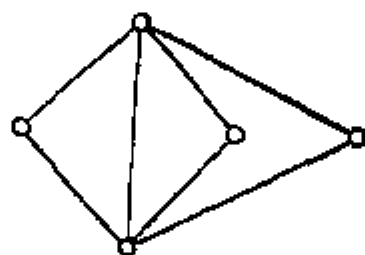
29 已知一组余圈基底与边结合的矩阵是

$$M_{\mu_c} = \begin{pmatrix} 1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&1&0&1&0&0 \\ 0&1&0&0&1&1&0&1 \\ 1&1&0&1&1&0&1&0 \end{pmatrix}$$

试作出该图。

30、已知有向图$G=(X, U)$的行列式

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$



试作出图G。

31、试求出右图中跨顶树的个数。

32、已知有向图的圈基与边的结合矩阵是

$$\overline{M}_{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

试求出该有向图。

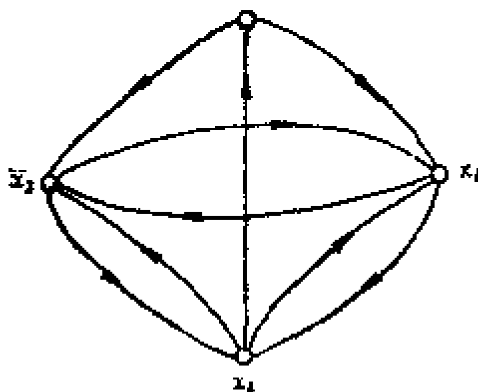
33、已知有向图的一组余圈基与边的结合矩阵是

$$\overline{M}_{\mu_c} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

试求出该有向图。

34、试证明：单纯图$G=(X, E)$的顶边结合矩阵是全单模的，其充分必要条件是G中不存在长度为奇数的初级圈。

35、对下图利用定理16求出以各顶点为根的树形图的个数，并作出相应的树形图以验证定理16。



第四章　平 面 图

§1　测 地 变 换

将一个球面放在平面上，与平面相切于一点作为南极点S。然后再取北极点N。假设在球面上任意一个图形不取北极点N作为其一个顶点，则自N到球面图的每个点联直线交平面于一点，这叫做把球面上的点投射到平面上。球面上的一个图形便通过投射，在平面上得一个对应的图形。反过来，平面上一个图形也可以通过这样的投射映象到球面上来。假使取球面上图形的某一点作为北极点N，那么经过投射，这点便变成平面上的无穷远点。

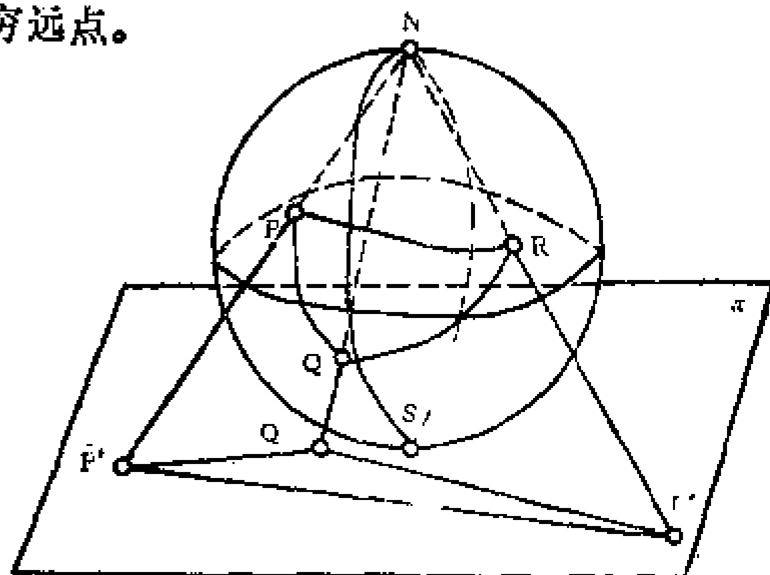


图 4.1

因此，一个图嵌（画）在球面上和嵌（画）在平面上是等价的。尽管通过不同的测地变换，即在球面上取不同的点做北极点，球面上同一个图在平面上对应于不同的图，但这些图是两两同构的。

§2　平面图的面

在第一章§4里我们曾经讲过，一个图，如果可以把它画

在平面上，边与边不再有顶点以外的交点，这样的图定义为**平面图**。

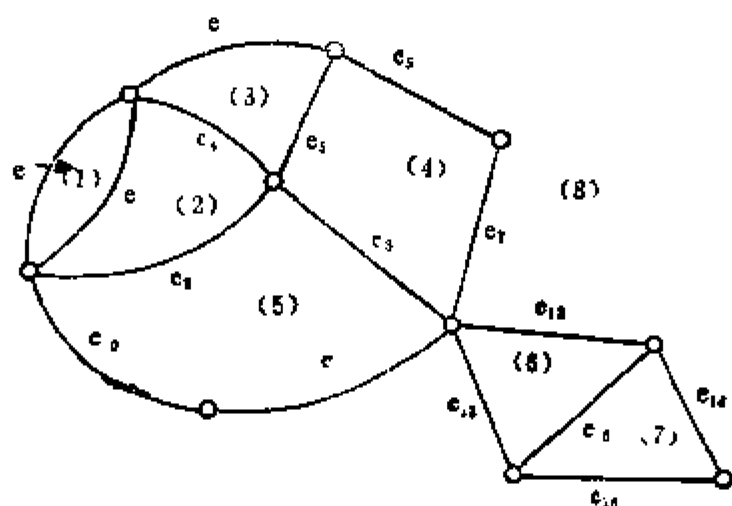


图 4.2

在平面上一个封闭而本身没有交点的连续曲线称为**约当（Jordan）曲线**。这样的约当曲线将平面分成两个区域，一个包含平面上的无穷远点，一个不含无穷远点。封闭曲线本身称为**区域的周界**。根据约当定理从一个区域的任一点 x 连续走向另一个区域的一点 y，必须穿过周界至少一次。但在同一区域的同点，则可用连续曲线相联且不与周界 C 相遇。通常我们把周界 C 所包围的不含无穷远点的那个部分叫做周界 C 所包围的**内域**，而称另一部分为**外域**。实际上这两个区域通过测地变换是可以相互转化的。因为将周界 C 投射到球面上，把所谓内域涂上红色，然后在所包部分任取一点做为北极点 N，再投射到平面上来，红色部分将变成包含无穷远点的那个所谓外域。

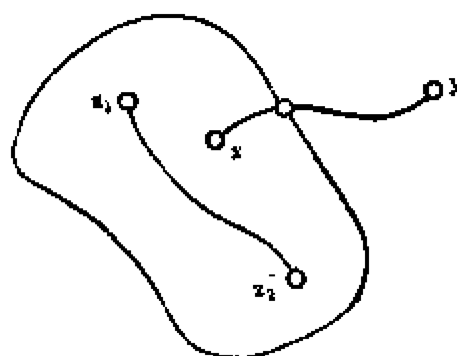


图 4.3

设 G 是一个平面图，其一组边包成一个区域。在这个区域内任取二点总可用一条连续的曲线把它们联起来，不与任何边或顶相遇。我们把这样的区域叫做平面图的一个**面**。包成一个面的那些边合称这个面的**周界**。显见，这样的周界一般是一个

初级圈。不过，当图不联接或有其他特殊情形时，包成一个面的周界可能不只是一个初级圈。

一个平面图有一个面包含平面的无穷远点，则称这个面为图的**无限面**。

图4.2中包含无限面(8)的周界不是一个初级圈。在图4.4中，包含面(5)和无限面(6)的都是两个不相联接的初级面。

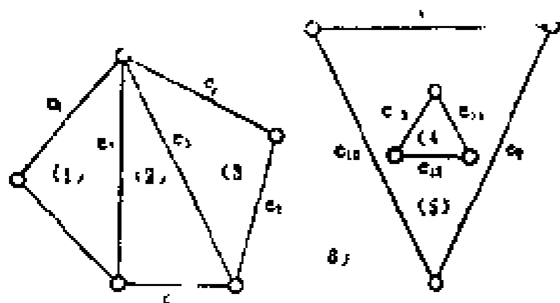


图 4.4

两个面，其周界有公共边的，称为**相邻**。如图4.2中的(1)与(2)、(2)与(3)、…都是相邻的。但(1)与(3)便不相邻。

又如图4.5是一个树，这个图只含一个无限面。

假使平面图有悬挂边，这样的边是不影响面的确定的。

当然，孤立点对于面的确定是没有意义的，可以略去不予讨论。

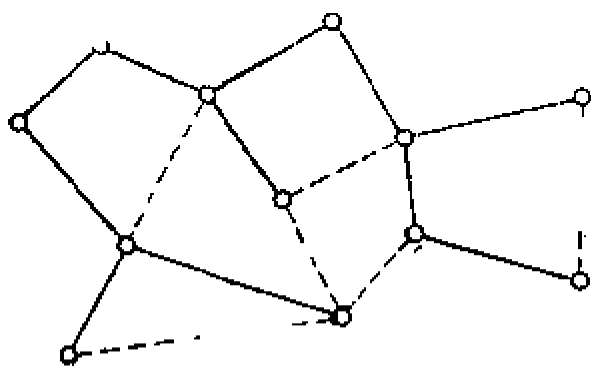


图 4.5

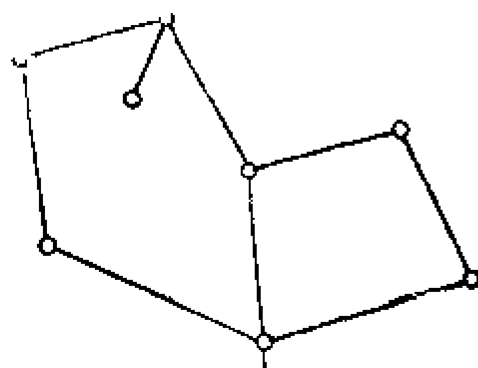


图 4.6

§3 尤拉公式

设图$G=(X, E)$是一个联接的平面图，n个顶，m条边。作出其一个跨顶树T，T含n个顶，边数$m'=n-1$（第二章§2）。余树T_C共有$m-n+1$条边。每向T加进T_C的一条边，便得一个初级圈。这个初级圈包成图G的一个面，这些初

级圈是相互独立的，构成一个圈基底。其他任何初级圈都线性相关于这些初级圈。因此，这些初级圈所包围的面便都是平面图G的不同的面。于此有下著名的

定理4.1（尤拉定理） 设联接的平面图，其顶数为n、边数为m、面数为f（包含无限面在内），则

$$n-m+f=2 \text{。} \qquad \text{（尤拉公式）}$$

证 已知联接平面图$G=(X, E)$的圈维数是

$$\nu(G)=m-n+1\text{，}$$

故如上所言，其有限面的个数是$\nu(G)$，再加上那个唯一的无限面，便得尤拉公式。（证毕）

例如，图4.2是一个联接的平面图。关于这个图，读者不难验证尤拉公式是成立的。但在图4.4中，尤拉公式便不成立。关于不联接的平面图，见下推理4.1a。

尤拉公式还可以用到三维空间。在三维空间，任何一个凸多面体的表面，含顶、棱、面三种元素，这三种元素的个数也满足尤拉公式。

例1 凸四面体共有4顶、6棱、4面，显见

$$4-6+4=2\text{。}$$

这个道理是很简单的。因为总可在凸体里放进一个橡皮球，然后将球充分涨大，使整个四面体的顶、棱、面都附着在球面上，再把它用测地变换投射到平面上来，便得一个平面图，4顶、6边、4面。

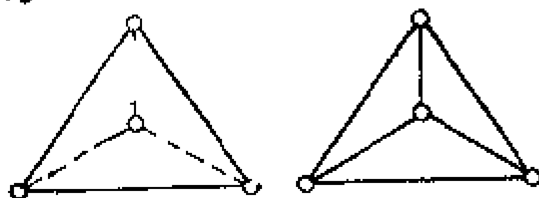


图 4.7

例2 图4.8（一）是一个凸多面体，（二）是其平面表示图。$n=16$，$m=28$，$f=14$，尤拉公式是成立的。

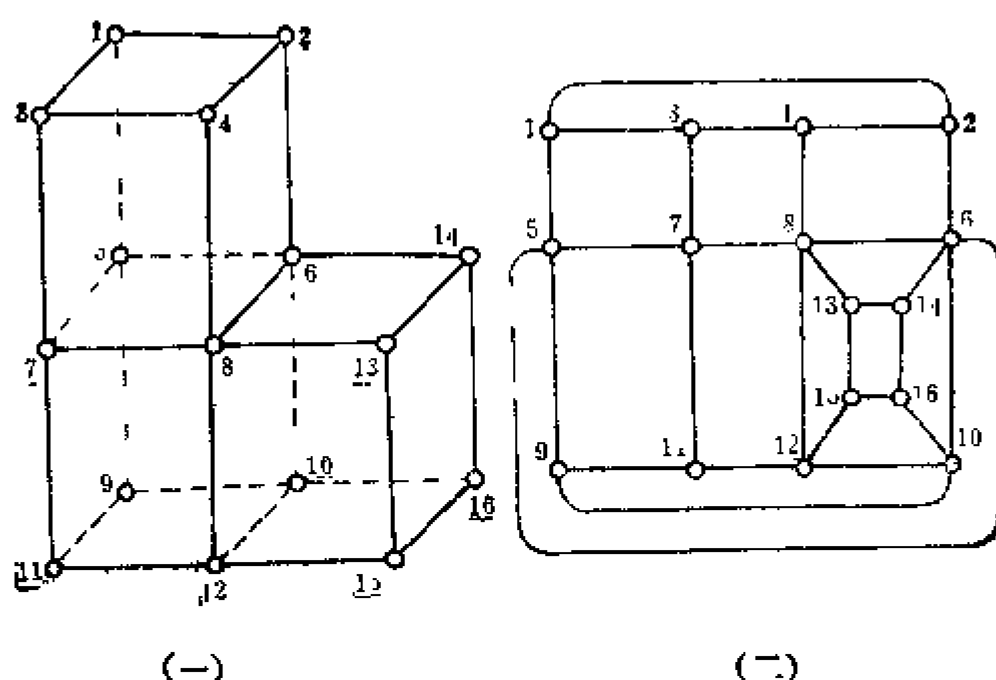


图 4 8

推理4.1a 任一平面图，包含n个顶，m条边，f个面，p个联接的分子图，则

$$n-m+f=p+1 \text{。}$$

证 尤拉公式对于每个联接的分子图都成立，但无限面却重复了p次。故上式成立。（证毕）

推理4.1b 水电供应图是非平面的。

证 这个图的顶点共分成两部分，x_1，x_2，x_3与y_1，y_2，y_3。图的边只能从x_i联到y_j，而x之间与y_j之间没有联边，这样的图叫做**两分图**(偶图，见下章)。又这样的图是单纯的。因此，每个初级圈至少含有4边。

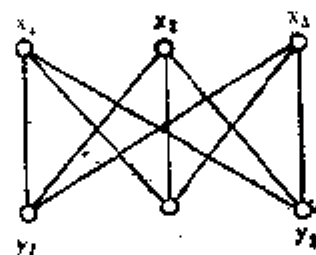


图 4 9

设图4.9是平面的，因图是联接的，共有6顶、9边，据尤拉公式，其面的个数

$$f=m-n+2=5 \text{。}$$

沿每个面计算边的总数，这个总数至少是$4\cdot5=20$。但每条边恰在两个面的周界上，故这个总数最多不超过$2\cdot9=18$，亦即应有$18\geqslant20$，这是矛盾。（证毕）

推理4.1$_c$ 完全五点形K_5是非平面的。

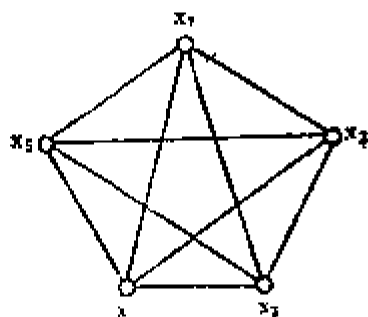


图 4.10

证 完全5点形是单纯的。设其是平面的，则每个面至少用3边围成，故沿每个面来计算边数，至少应有$3f$条边。同样，每条边恰只能在两个面的周界上，故计算围绕面的总边数，其总数不能超过$2m$。若K_5是平面的，其面数

$$f = m - n + 2 = 10 - 5 + 2 = 7$$

故应有

$$2m \geqslant 3f \quad 或 \quad 20 \geqslant 21$$

这是矛盾。 （证毕）

推理4.1$_d$ 单纯平面图$G = (X, E)$，总有顶x，其次数$d_G(x) \leqslant 5$

证 可假设图G是联接的。否则，可分别考察其各个联接的分子图。还可假设图G的边数至少是5，否则结论显然。由于图是单纯的，围成每个面的边数至少是3。计算总数，边的条数不少于$3 \cdot f$。但每条边至多在两个面的周界上，计算边的总数，不能超过$2m$。应有

$$2m \geqslant 3f \quad 或 \quad f \leqslant \tfrac{2}{3}m。$$

设图的每个顶的次数至少是6，据定理1.1：

$$6n \leqslant 2m \quad 或 n \leqslant \tfrac{1}{3}m，$$

代入尤拉公式，便有

$$2 = n - m + f \leqslant \tfrac{1}{3}m - m + \tfrac{2}{3}m = 0 \quad。$$

这是矛盾。 （证毕）

读者可注意，在证明几个推理的过程中，我们实际上用到这样一个事实，即取图的面作为一种事物，取图的边作为另一种事物。面的周界上有某边，或某边在某个面的周界上。作为

面边的联系，据第一章§1图的基本概念，将面边作为顶，设面的集是A，边的集是B。任一顶$a\in A$与任一顶$b\in B$有边相联，当且仅当面a的周界上有边b时，这样乃得一个两分图，称为**面边结合图**（见图4.11）。设面的周界所含边数不小于k，则这个面边结合图的总边数不少于kf。当图是平面的，每边上最多有2面，故恒有

$$kf\leqslant 2m,$$

或
$$f\leqslant\frac{2}{k}m\ 。$$

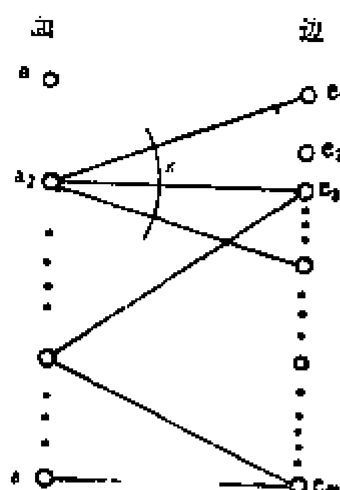


图 4.11

代入尤拉公式便有

$$\frac{kf}{2}\leqslant m\leqslant\frac{k}{k-2}(n-2),$$

这个不等式，有时是判断一个图非平面的重要手段。

譬如在水电供应图中，$k\geqslant 4$，这个式子是：

$$2f\leqslant m\leqslant 2n-4\quad 或\quad 10\leqslant 9\leqslant 8,$$

矛盾。

又如在推理4.1c与推理4.1d里，$k=3$。推出

$$21\leqslant 20\leqslant 18,$$

这也是矛盾。

读者可以注意，类似这样的技巧，我们还会经常用到。

§4 对偶图

设平面图$G=(X, E)$是联接的，无孤立顶。可按下面的方法，作出一个图G^*与G对应：

（1）在图G的每个面里取一点，作为G^*的顶。

（2）对应于图G的每一边e，联接在被e隔开的那两个面里的图G^*的两个对应顶，得图G^*的一条边e^*，参看图4.12。

图G^*称为图G的对偶图，设图G^*的顶数是n^*，边数是

m^*，面数是f^*，显然有

（1） $n^*=f$，

（2） $m^*=m$，

（3） $f^*=n$。

按作对偶图的方法，作G^*的对偶图$(G^*)^*$，显然有：

$$(G^*)^*=G。$$

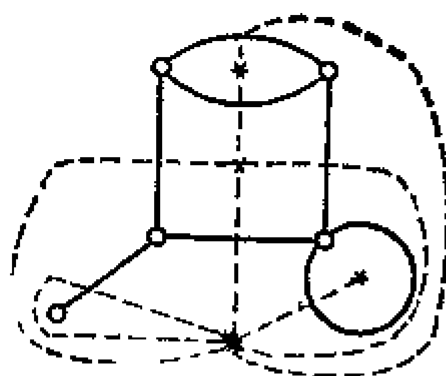


图 4.12

在对偶图G^*中，G的每个面对应于G^*的一个顶，G的环对应于G^*的一条边，G的一条悬挂边对应于G^*的一个环，面的周界所构成的那个初级圈对应于G^*的一个初级余圈，写成定理便是

定理4.2 G的每个初级圈对应于其对偶图G^*的一个初级余面。反之亦然。

证 设G是联接的，其对偶图G^*也是联接的。

若G的一个初级圈C是一个面的周界，含在其内的G^*的那个顶上的边如果全部去掉，G^*便被分成联接的两部分，（参看

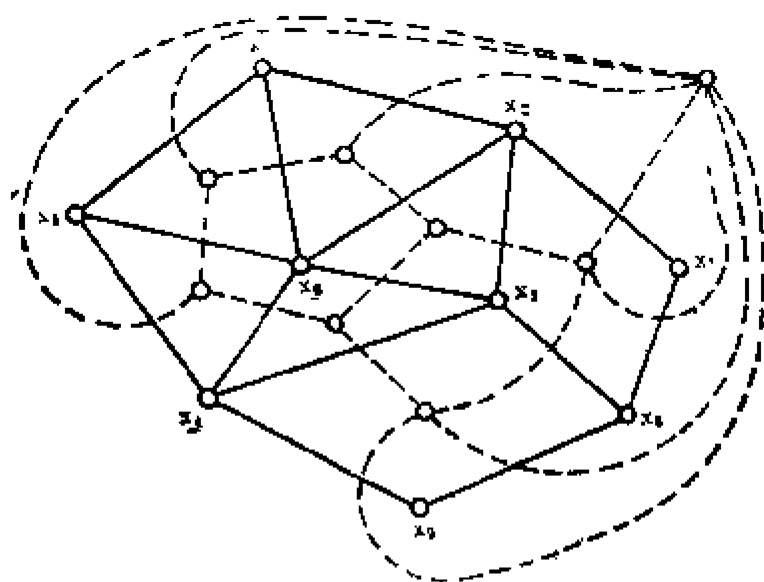


图 4.13

图4.13中的圈$\mu=[x_1x_6x_6x_1]$一部分就是这个顶。故顶上的

诸边构成一个初级余圈。）这被隔断的两部分加上余圈，合起来便是联接图G^*。

若初级圈C含若干个面于其内，如图4.13中的$\mu=[x_1x_2x_3x_4x_5x_1]$，则与之相应的G^*的子图$G^*_{A^*}$是联接的，含在μ外的G^*的子图$G^*_{X^*-A^*}$也是联接的，其合是G^*。G^*是联接的。故联此二者的那些边构成一个初级余圈。

由于$(G^*)^*=G$，故逆定理也成立。（证毕）

推理4.2 设平面图$G=(X,E)$是联接的，其对偶图是G^*，则

$$\nu(G^*)=\mu(G),\ \mu(G^*)=\nu(G)。$$

证 据上定理，G的初级圈底对应于G^*的初级余圈的底，反之亦然。故推理成立。

又上二等式可用尤拉公式推得：

$$\nu(G^*)=m^*-n^*+1=m-f+1=m-(m-n+2)+1$$
$$=n-1=\mu(G),$$
$$\mu(G^*)=n^*-1=(m-n+2)-1$$
$$=m-n+1=\nu(G)。$$

其实，这二等式是对偶的。有了第一等式，把G看作G^*的对偶图，便也得第二式。（证毕）

§5 库拉图斯基定理（Kuratowski[1930]）

在§3里，我们已证明了水电供应图（顶点分成两组，各含3顶，可能联的边都存在，称作完全的两分图，记作$K_{3,3}$）是非平面的，同样也证明了完全五点形K_5也是非平面的。那么，在$K_{3,3}$或K_5的边或顶上分别增加一些点或边，$K_{3,3}$与K_5既然不能嵌在平面上，这些图当然也就不能嵌在平面上。于此，有下重要定理

定理4.3 联接图$G=(X,E)$是平面的，其充要条件是图G里不含部分子图和图4.14中类型Ⅰ或类型Ⅱ的图同构。

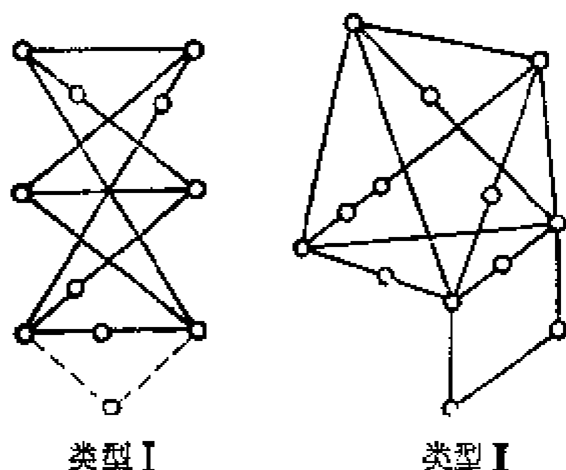


图 4.14

证 一个图G若是平面的，当然不可能包含类型Ⅰ或类型Ⅱ的图作为其部分子图。否则，这样类型的部分子图既然不能嵌在平面上，整个的图，当然也就不能嵌在平面上了。

充分性的证明见下节。由于这个证明比较长，故留作下一节的内容。读者可以略去不读。

定理4.3是刻画平面图的。在理论系统上很重要，但实际应用仍是困难的。如何从顶边都很多、比较复杂的图中发现这样类型的部分子图是比较不容易的。类似的刻画还有很多，这里就不多讲了。

$K_{3,3}$与K_5至少含五个顶，所以一个图，无论它的边数有多少，只要它的顶不超过4点，这种图总是平面的。又$K_{3,3}$共有9边，K_5共有10边，所以一个图，它的边数不超过8，这样的图也总是平面的。又在§3的末尾，我们写了一段注意，利用尤拉公式去证明一个图是非平面的，有时也很有用。可是在应用时，不产生矛盾，当然也就不能从中推出正面的结果，说图是平面的。

例 彼特森（Petersen）图是非平面的。

图4.15叫做**彼特森图**，共含10顶、15边、3次正规（一般，若图中每点的次数均为k次，则称该图为**k次正规的**）。K_5是4次正规的，彼特森图当然不能包含类型Ⅱ的部分子图。但取如图4.16所示之部分子图来看，这个部分子图是一个类型Ⅰ的图。据库拉图斯基定理知，彼特森图是非平面的。还可以做出很多这样类型Ⅰ的部分子图。

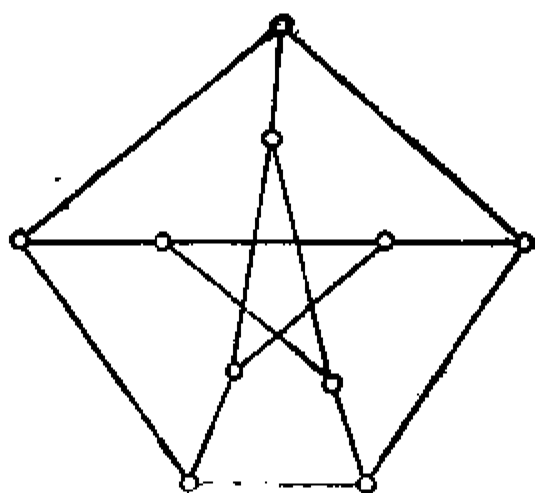


图 4 15

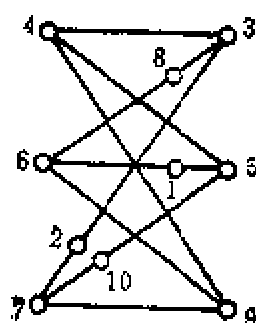


图 4 16

利用尤拉公式，也可以证明彼特森图是非平面的。在这个图里有圈，其长至少为5。在§3末段那个公式

$$m \leqslant \frac{k}{k-2}(n-2) \text{里将出现} 15 \leqslant \frac{5}{3} \cdot 8。$$

这是矛盾。故彼特森图是非平面的。

§6　库拉图斯基定理充分性的证明

所谓充分性的证明，是往证若图G不含部分子图与类型 I 或类型 II 的图同构，则图G是平面的。

用反证法。设定理不成立，即设图G不含部分子图与类型 I 或类型 II 的图同构，但是非平面的。往证将产生矛盾。

（1）命图G联接、无断点①，且是具此特性的这类图中极小的。即若在图G中任意去掉一边，图便失去非平面性，或者说任意去掉一边，图便成为平面的。命$x_0=[u_0, v_0]$是图G的任一边，去掉边x_0得：

$$F=G-x_0$$

据假设，图F是平面的。

（2）往证在图F里必有初级圈过u_0与v_0，设相反，在图F

① 断点的定义，参看第八章。

里没有初级圈过u_0与v_0。

如果图F不是联结的，则整个图F将分成不相联接的分子图，u_0与v_0分别位于不同的分子图内。由于F是平面的，这些分子图当然也是平面的。经过测地变换，可以将u_0与v_0同时变到图的外域的边界上。联接u_0v_0，恢复原图G，图G将是平面的，这是矛盾。

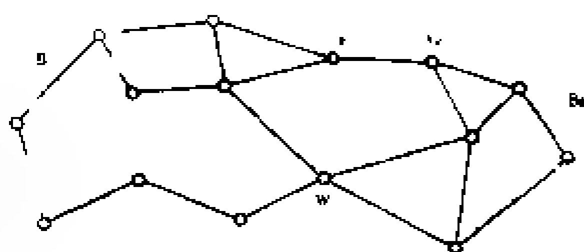


图 4.17

故图F应是联接的，u_0与v_0之间应有链相联，所有这些链必须同时通过一点w（因F没有初级圈过u_0与v_0），这点w将F分成两块，u_0与v_0分别属于不同的两块B_1与B_2，如图 4.17那样。B_1与B_2的边数较图G的边数为少，故B_1与B_2应均是平面的。经过测地变换可将u_0与v_0同时变到图的外域的边界上，联接u_0、v_0恢复图G，G将是平面的，这是矛盾。

（3）进一步研究图F。根据上面的研究，F是平面的，含u_0与v_0且有初级图包含u_0与v_0将F画在平面上，并在图中找出含u_0与v_0的最大圈Z。这个圈Z将图分成三部分，一部分在Z的外域，最多与Z有交点，称为图的外部。一部分在Z内，最多也只与Z有交点。一部分就是Z。所谓Z最大，即不能再经过对Z的反射，将外域的图嵌在Z的内域而不失去平面性。

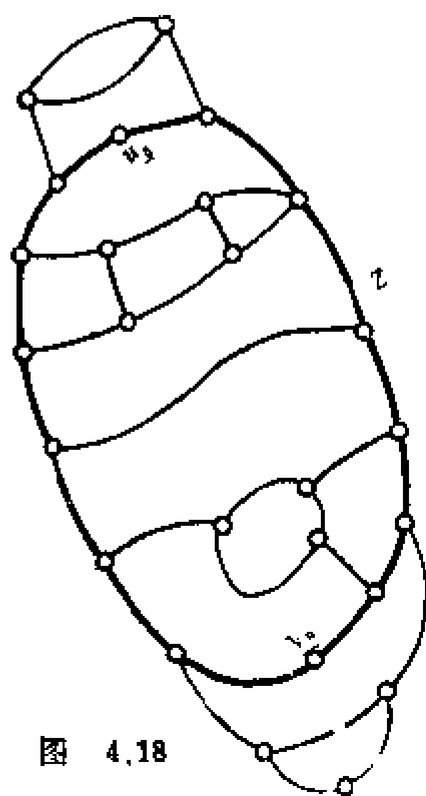


图 4.18

由于F是联接的，Z的外域部分可以分成若干不相联接的片。但这些片必须与Z相联，且由于Z的极大，每个片必须与Z至少交于二点（否则便可将这片嵌进Z内）且此二点被u_0 v_0二点所分隔。若给Z以固定方向，则至少必有一点在$Z(u_0, v_0)$内，另一点在$Z(v_0, u_0)$内。关于Z的内域，其各个片也有类似性质，且Z的内域至少必有一片与Z交于二点，被u_0与v_0所隔开。否则，如果Z的内域是空的，便可将边$x_0=[u_0, v_0]$联接，恢复图G，图G乃是平面的。这是矛盾。

（4）至少有一外片交Z于二点(u_1, v_1)，一在$Z(u_0, v_0)$内，一在$Z(v_0, u_0)$内。同样，也必有内片交Z于二点$\{u_2, v_2\}$，一在$Z(u_0, v_0)$内，一在$Z(v_0, u_0)$内，同时也一在$Z(u_1, v_1)$内，一在$Z(v_1, u_1)$内。即u_2、v_2二点同时被u_0、v_0及u_1、v_1二对点所隔开。也可能有内片同时交Z于两对点w_0与w_0'及w_1与w_1'，一对被u_0、v_0所隔开，一对被u_1与v_1所隔开。

（5）以下就交点的分布情况进行研究。

情形1 设有一内片与Z的交点u_2与u_0、v_0、u_1、v_1均不相同，不妨设u_2在$Z(u_0, v_0)$内。此时又依v_2的位置可分如下两种情形考查：

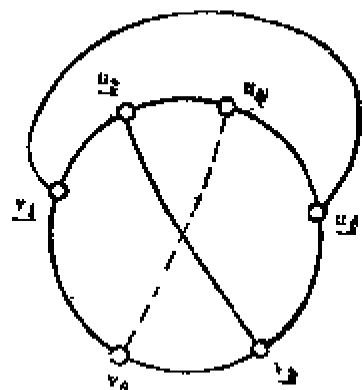
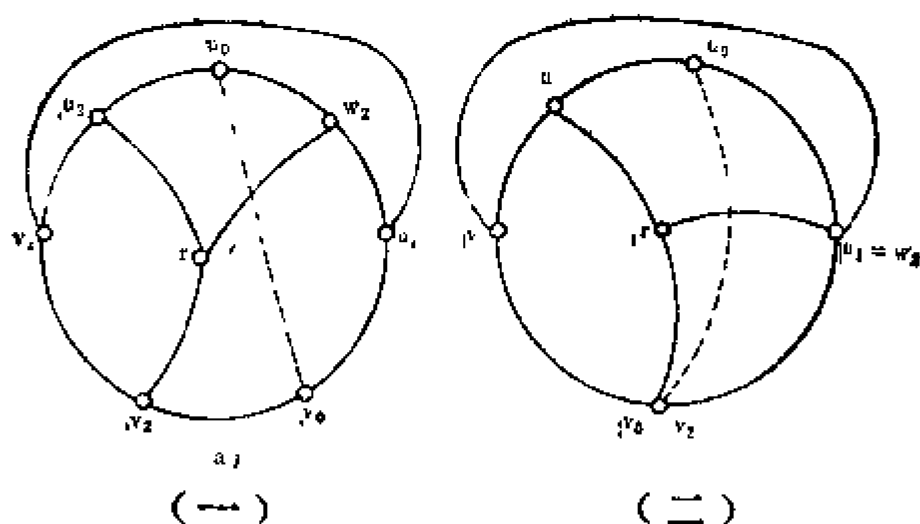


图 4.19

(i) 此内片与Z的另一交点v_2也与u_0、v_0、u_1、v_1均不相同。此时u_2、v_2既分隔u_0、v_0又分隔u_1、v_1，如图4.19所示。此时在图G内，由初级圈Z，u_2到v_2（经内片）的初级链及u_1到v_1（经外片）的初级链加上边$x_0=[u_0, v_0]$形成的部分图与类型Ⅰ的图同构（考查点集$\{u_0, v_1, v_2\}$与$\{u_2, u_1, v_0\}$）。此与假设矛盾。

(ii)此内片与$Z(v_0, u_1)$无公共点。此时必须还有两个

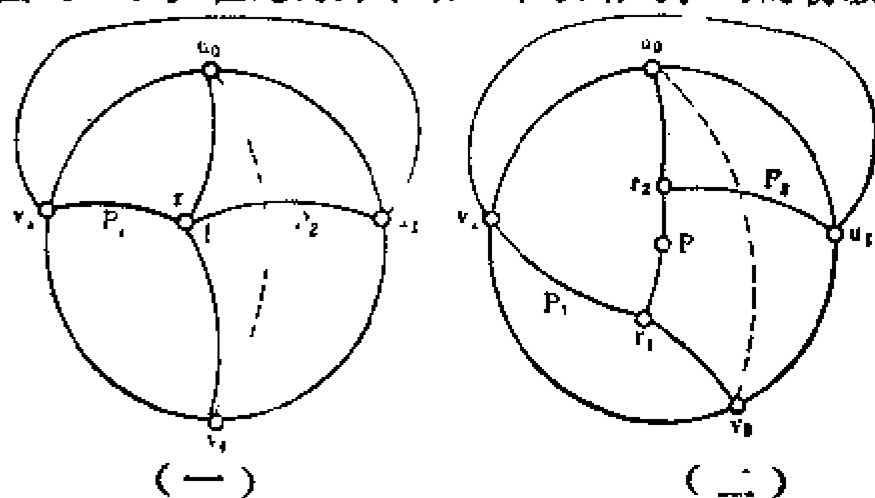


（一）　　　　（二）

图 4.20

交点v_2与w_2分别在$Z(v_1, v_0)$及$Z(u_1, u_0)$上，或者$v_2=v_0$，或者$w_2=u_1$（见图4.20）。于是，此内片上必存在一点r，且由r到u_2，v_2，w_2存在点互质的初级链。此时也导致在原图G内存在一个部分图与类型Ⅰ的图同构（考查点集$\{u_0, v_1, r\}$与$\{u_2, v_2, w_2\}$）。仍与所设矛盾。

情形2　设任一内片均与Z没有不同于u_0、v_0、u_1、v_1的交点。此时该内片必然把u_0、u_1、v_0、v_1都作为它与Z的公共点（见图4.21）。在此内片中取一个联结u_0、v_0的初级链P，



（一）　　　　（二）

图 4.21

其长度必大于1。在其上取一点$r(\neq u_0, v_0)$，于是由r到u_1、v_1必也存在初级链P_1，P_2。此时可能有下列情形发生：

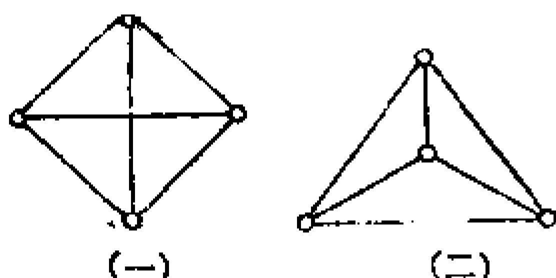
（1）P_1、P_2与P均只有一个公共点r（图4.21的（一））。此时G中存在一个部分图与类型Ⅱ的图同构（考查点集$\{u_0,$

u_1, v_0, v_{-1}, r })。此与假设矛盾。

(ii)设由点r到v_1的初级链P_1与P最后一个公共点为r_1，由点r到u_1的初级链P_2与P的最后一个公共点为r_2，而且$r_1 \neq r_2$（图4.21(二)）。此时导出在原图G中有一个部分图与类型I的图同构(考查点集{v_{-1}, v_0, r_2}与{u_0, u_{-1}, r_1})。仍与所设矛盾。（证毕）

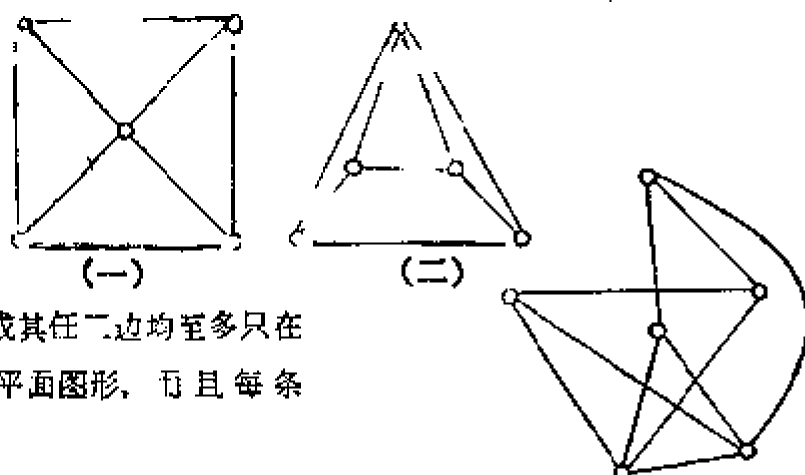
习　　题

1、试证明下图（一）及（二）不可由球面上的同一个图取不同的测地变换方式而得到。



(一)　　　　(二)

2、试证明下图（一）及（二）可由同一个球面上的图以不同的方式测地投影到平面上而得。

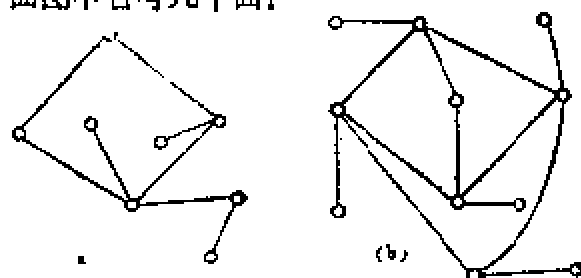


(一)　　　　(二)

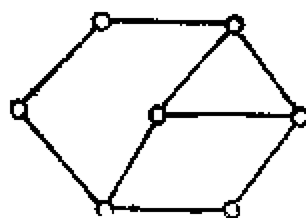
3、将右图画成其任二边均至多只在顶点处相交的一个平面图形，而且每条边都画成直线。

4、将右图画在平面上，使其任二边除了顶点之外没有其他的公共点。

5、下列平面图中各有几个面？



6　试证明：一个平面图可通过测地变换将其任一个面的周界变换成无限面的周界。

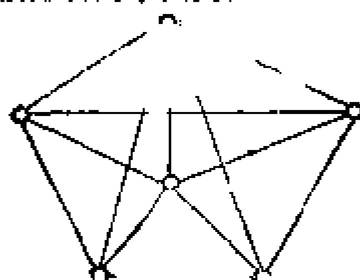


7、对右图分别画出其无限面以长为3、4、5的初级圈为周界的图。

8、试证明，如果图G是点数$n\geq 11$的单纯平面图，则其补图$\bar{G}$是非平面图。

9、试作出一个$n=8$的单纯平面图G，使得其补图$\bar{G}$也是平面的。

10、使用尤拉公式检验下图是否为平面图。



11、设一单纯平面图G有n个顶点、m条边、f个面。试证明：

（1）如果$n\geq 3$，则$m\leq 3n-6$，$f\leq 2n-4$。

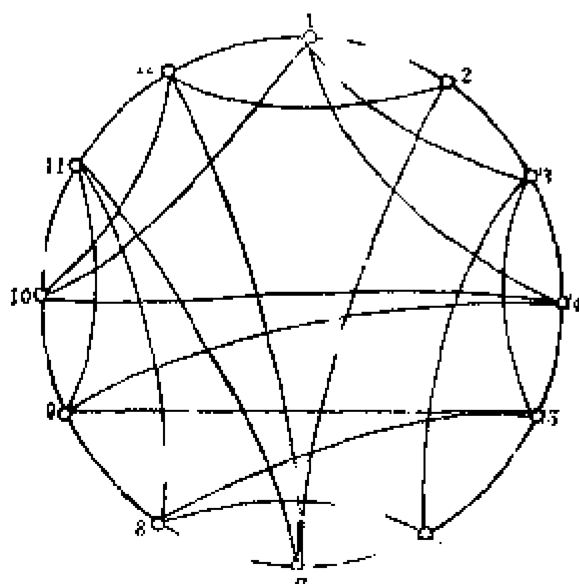
（2）如果$n\geq 4$，则至少有4个顶点的次数不大于5。

（3）如果G中各顶点的最小次数为4，则至少有6个顶点的次数不超过5。

（4）如果G中各顶点的最小次数为5，则至少有12个顶点的次数是5。

12、试证明，如果G是平面的三角剖分图，则$m=3n-6$。

13、求出下图的一个平面嵌入，使其中每一条边都是一条直线。



14、设$S=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$是平面上$n\geq 3$个点的集，其任二点间的距离都不小于1，证明最多有$3n-6$对点间的距离恰好为1。

15、举例说明，一个平面图G的不同的平面嵌入可得到彼此不同构的对偶图G^*。

16、如果我们定义：图$G=(X, E)$与$G_1=(X_1, E_1)$是对偶的，当且仅当在其边集之间存在一个映射f：$E\to E_1$，使得f是一一的，映上的，而且如果边集C在G中是一个初级图，则$f(C)$在G_1中是一个初级余圈，且反之亦真。若先定义一个图的对偶图，惠特内於1933年证明了下面的定理：

一个图是平面的，当且仅当其有对偶图。

试说明此定义与我们原有的定义不完全一致。举例说明其差别。

17、举例说明：如果单纯图$G=(X, E)$不是联接的，则依我们所述之对偶图G^*的作法所得之G^{**}不再等于G 进一步证明：$G^{**}\cong G$的充要条件是G是联接的。

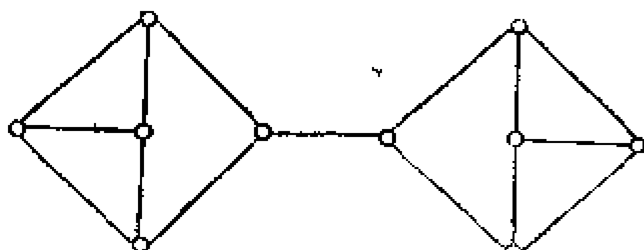
18、平面图G如果满足$G\cong G^*$，则称G是自对偶的。

（1）试证明：如G为自对偶的，则$m=2n-2$。

（2）对$n\geq 4$的每一个n值都求出一个在n个顶点上的自对偶的平面图。

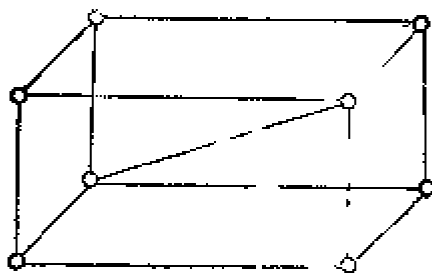
19、设平面图$G=(X, E)$的跨顶树为T，$E^*=\{e^*\in E(G^*)\mid e\notin E(T)\}$，试证明：$T^*=G^*(E^*)$是$G^*$的跨顶树。

20、试证明 如果平面图G有次数为1的点，则其对偶图G^*中有环。如果G中有次数为2的点，则其对偶图G^*中含有二重边。反之，则不然。试研究如下图G。



21、试证明：不存在这样的平面图，它有5个面，且任二面间均至少有一条公共边。

22、检查下图是否为平面图。



第五章　两分图（偶图）

§1　基本概念与基本定理

设图$G=(X, E)$的顶集可以分划成两部分X_1与X_2，其中$X_1, X_2 \neq \phi$，$X_1 \cap X_2=\phi$，$X_1 \cup X_2=X$，使图的每一边$e=[x_1, x_2]$，其一个顶点在X_1内，一个顶点在X_2内。而X_1里任二点之间无联边，X_2里任二点之间也无联边。这样的图叫做**两分图**（或称**偶图**）。

例1　水电供应图是一个两分图。代表住户的顶是一组，代表水、电、煤气厂各点的又是一组。画起图来如图5·1（第一章§1例3）。

例2　港口运输问题。大江两岸各有若干个港口，两边的港口有货物来往运输（不转口）。画起图来是一个两分图。（见图5.2）

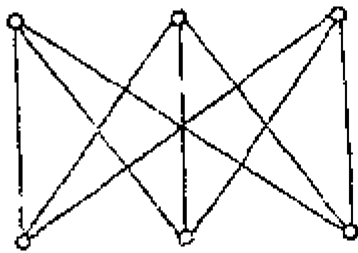


图 5.1

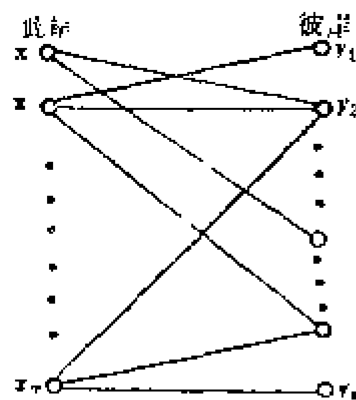


图 5.2

例3　不同的组织成员分配问题。有若干个人，分属于若干个不同的组织（每个人所属的组织可以交叉），画成图是一个两分图（见图5.3）。

例4　都市里付食供应问题。在一个大都市的郊区，有若干个付食品加工厂分别供应市区若干个销售点，画起图来是

一个两分图（见图5·4）。

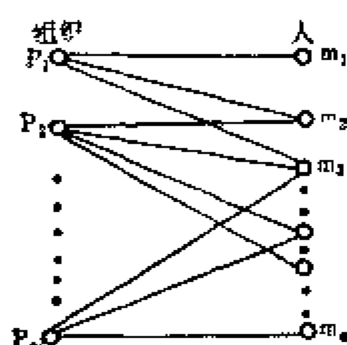


图 5 3

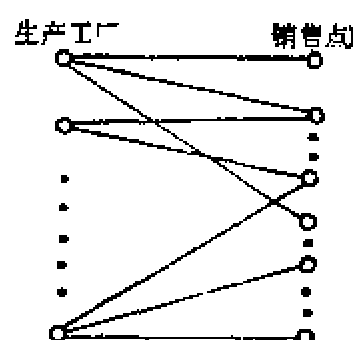


图 5 4

一般把两分图记作$G=(X, Y, E)$，其中X，Y代表顶集，$X\cap Y=\varnothing$，E代表边集。设X的每个点与Y的每个点之间都有联边，则这样的图叫做**完全两分图**。设$|X|=m$，$|Y|=n$，完全两分图便记作$K_{m,n}$。我们已经知道$K_{3,3}$不是平面的（推理4.1b）。当m、$n\geq 3$，$K_{m,n}$当然也不是平面的。因其中总含有$K_{3,3}$作为它的一个部分子图。

任给一个无向图$G=(X, E)$，怎样来判断它是否是一个两分图呢？这便是下列定理所要解决的问题。

定理5.1 无向图$G=(X, E)$是两分的，其充分和必要条件是图G不含奇圈。

证 必要性 必要性是很明显的。设图G的顶分划成X、Y两部分，$X\cup Y$中的顶都是两两无边相联的。一个圈自X中一顶x_1出发，联到$y_1\in Y$，若再有另一边，也联x_1与y_1，则这样的圈其长为偶数。否则，自$y_1\in Y$联到$x_2\in X$，最后必须再自Y中一点回到x_1，其所含边数总是偶数。

充分性 设图G分成若干个联接的分子图，G_0是其中一个。在G_0里任取一点x_0，然后到G_0中其他的顶联链。将G_0里的顶分成两部分，凡到x_0有偶长的链的，命属于X_0，凡到x_0有奇长的链的，命属于Y_0。因G_0是联接的，x_0到G_0里其他任一顶均有链相联。又x_0到任一点x，不能既有偶长的链相

联，又有奇长的链相联。否则将产生奇圈，这与定理的假设相矛盾。故G_0的顶可分划成X_0与Y_0，两者均不为ϕ。设$x_0 \in X_0$，又在X_0里任取二顶x_1与x_2，往证x_1与x_2之间决无边相联。命x_0到x_1与x_2的两个最短链分别为

$\mu_1[x_0, x_1]$与$\mu_2[x_0, x_2]$。

μ_1与μ_2都是偶长的。若μ_1与μ_2有若干个交点，命其最后一个交点为b（见图5.5）。μ_1与μ_2都是最短的。故$[b, x_1]$与$[b, x_2]$都是初级链，且其长同为奇数或同为偶数。否则，$[x_0\mu_1 b\mu_2 x_0]$将是一个奇圈。这与定理的假设相矛盾。

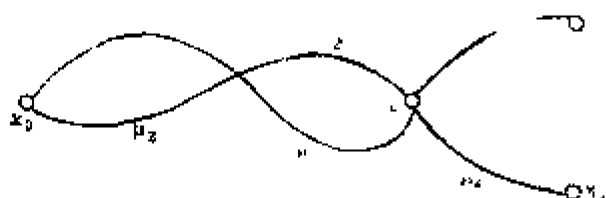
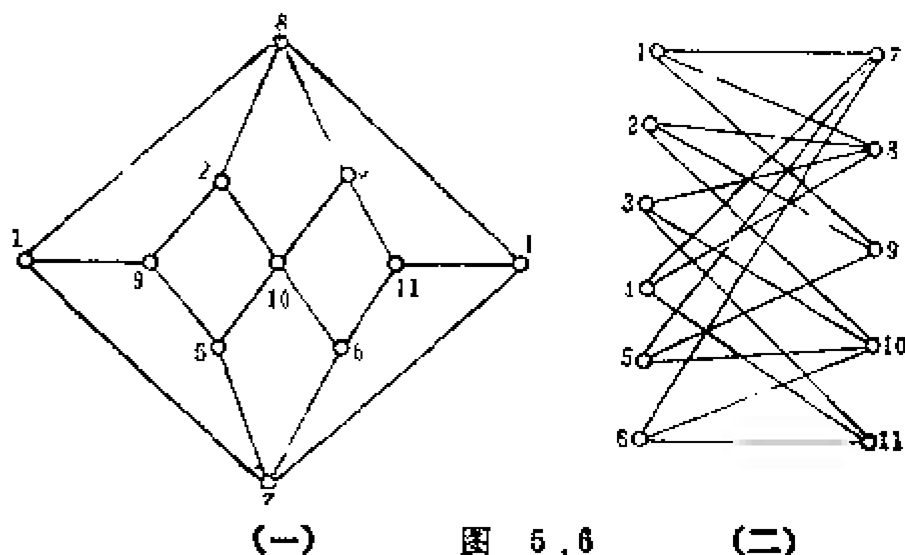


图 5.5

若x_1与x_2之间有边相联，则圈$[b\mu_1 x_1 x_2 \mu_2 b]$将是奇长的，这和定理的假设矛盾。

同理可证，Y_0中任二顶也不能有边相联，这就证明了原图G的联接的分子图是一个两分图。同理可证原图G的每一联接的分子图都是两分的，故G是一个两分图。（证毕）

例1 赫尔施尔（Herschel）图是两分的。图5.6中的(一)是赫尔施尔原图。(二)是其对应的画成明显的两分圈的另



(一)　　　图 5.6　　　(二)

一种画法。又这个图是平面的，它的基础圈都是偶圈，其长为4。由这些偶圈按环和方式所构成的圈都应是偶长的。故据定理5.1它是一个两分图。图5.6中的(一)与(二)实际上是同构的。

例2 树是两分图。由于树无圈，即其任一圈长都是0，故树只含偶圈。

§2 两分图的矩阵表示

已给单纯的两分图G（X，Y；E），可以写出它的相邻矩阵。取X里的点为行，Y里的点为列作矩阵

$A=(a_{ij})$

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & \text{若}x_i\in X\text{到}y_j\in Y\text{有边相联，}\\ 0 & \text{在其他情况，}\end{cases}$$

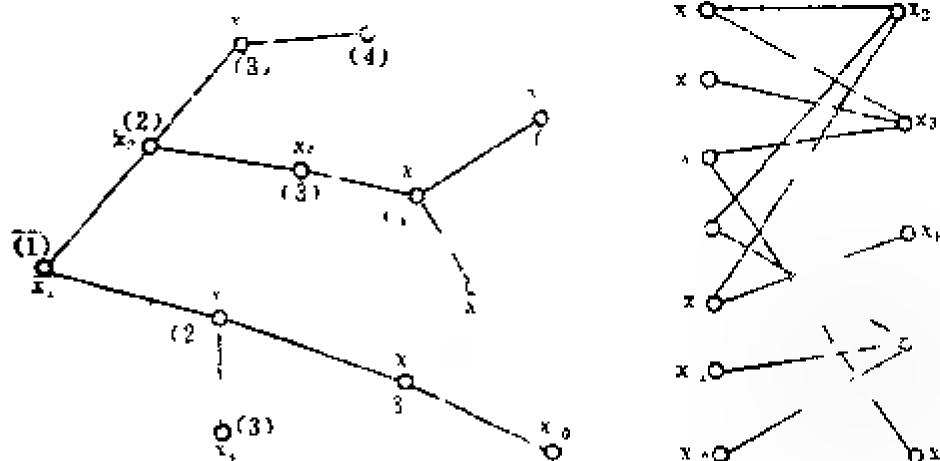


图 5.7

矩阵A是一个（0，1）矩阵，每一个这样的（0，1）矩阵都唯一地对应于一个单纯的两分图G（X，Y；E）。

设（0，1）矩阵是$m\times n$型的，第i行上“1”的个数是p_i，则（p_1，p_2，…，p_m）称为这个（0，1）-矩阵的**行和向量**。设其第j列上“1”的个数是q_j，则（q_1，q_2，…，q_n）是其**列和向量**。p_i表示相应的两分图G（X，Y；E）里顶

$x_i\in X$的次数，q_j表示顶$y_j\in Y$的次数。作和$\sum_{i=1}^{m}p_i$与$\sum_{j=1}^{n}q_j$，从（0，1）矩阵来看，两者都表示矩阵里"1"的总数。从两分图来看，两者都表示相应图$G=(X, Y; E)$里边的条数。因此总有

$$\sum_{i=1}^{m}p_i=\sum_{j=1}^{n}q_j。$$

现在的问题是：已给二向量$(p_1, p_2, \cdots, p_m)$与$(q_1, q_2, \cdots, q_n)$，在什么样的条件下，才能有一个单纯的两分图$G=(X, Y; E)$取p_i为顶$x_i\in X$的次数，取q_j为$y_j\in Y$的次数。把这个问题转换成（0，1）一矩阵的问题，便是在什么样的条件下，才能存在一个$m\times n$型的（0，1）一矩阵。取$(p_1, p_2, \cdots, p_m)$为其行和向量，取$(q_1, q_2, \cdots, q_n)$为其列和向量。为此，先作下列说明，设已给向量$p=(p_1, p_2, \cdots, p_m)$，其中$p_i$均为非负整数。作$m\times n$型（0，1）一矩阵，取$p$为其行和向量，只要对$i=1,2,\cdots,m$均有$p_i\leqslant n$这总是可能的。将矩阵$A$中行上的1统统移到左面，成矩阵

$$\overline{A}=\begin{array}{cccc} 1\ 1\ 1\cdots\cdots 1 & 0 & \cdots\cdots 0 & p_1 \\ 1\cdots\cdots 1 & 0 & \cdots\cdots 0 & p_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \vdots \\ 1\ 1\ 1\cdots\cdots 1 & 0 & \cdots\cdots 0 & p_m \end{array}$$

我们把这样形式的矩阵叫做最大矩阵。记$\overline{A}$的列和为$\overline{S}_1$，$\overline{S}_2$，$\cdots$，$\overline{S}n$，，从这里可以看出：取$p=(p_1, p_2, \cdots, p_m)$，$\overline{S}=(\overline{S}_1, \overline{S}_2, \cdots, \overline{S}n)$分别为行和向量与列和向量的$m\times n$型（0，1）一矩阵是存在的，而且是唯一确定的。这个矩阵就是$\overline{A}$。

二向量$S=(s_1, s_2, \cdots, sn)$与$S^*=(s_1^*, s_2^*, \cdots, sn^*)$其元素都是非负整数，设下列条件能满足：

（1）$s_1\geqslant s_2\geqslant\cdots\geqslant sn$；　　$s_1^*\geqslant s_2^*\geqslant\cdots\geqslant sn^*$

(2) $\sum_{i=1}^{k} s_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} s_i^*$ $(k=1, 2, \cdots, n-1)$

$$\sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{i=1}^{n} s_i^*$$

则称向量S被向量S^*所统帅，记作

$$S \prec S^* 。$$

定理5.2 设$R=(r_1, r_2, \cdots, r_m)$，$S=(s_1, s_2, \cdots, s_n)$是二向量，其元素都是非负整数。用$R$为行和向量作矩阵$\overline{A}$，命其列和向量为$\overline{S}$，则存在矩阵$A$取$R$为其行和向量，$S$为其列和向量，其充分和必要条件是

$$S \prec \overline{S} 。$$

证 必要性 调整R与S里元素的顺序，使成递降序列。设存在矩阵A取R与S为其行和向量与列和向量。作矩阵$\overline{A}$，它由A逐次在行里向左移动"1"而得到。故有

$$\sum_{i=1}^{k} s_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} \overline{s}_i \quad (k=1, 2, \cdots, n-1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{s}_i$$

因而 $S \prec \overline{S}$

充分性 设$S \prec \overline{S}$。如上所言，设向量R与S的元素调整成递降序列，往证，可自$\overline{A}$作出一个矩阵A，其行和向量与列和向量分别是已给的R与S。其作法是在矩阵$\overline{A}$的行里按下述规则连续将"1"自左向右移动。在$\overline{A}$里，找其第n列元素为0的含1最长的行，将其末一个"1"移至第n列，使所得的矩阵其第n列的列和等于s_n为止。若在$\overline{A}$里有几个行其长度相等，则最先把在最下面那个行里的"1"移至第n列。如此便得一个矩阵

$A^{(1)} = (\overline{A}_{n-1}, A_{\cdot}$

其中$\overline{A}_{n-1}$是$m\times(n-1)$型的最大矩阵，其行和向量与列和向量都是递降的。A_1是$m\times1$型矩阵，其列和等于s_n。

首先证明此作法的可行性。由于$\sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{s_i}$，$\sum_{i=1}^{k} s_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} \overline{s_i}$（$k=1, 2, \cdots, n-1$），因而有：$\sum_{i=k}^{n} s_i \geqslant \sum_{i=k}^{n} \overline{s_i}$，$k=1,2,\cdots,n-1$均成立。特别由此得出$s_n \geqslant \overline{s_n}$，以及$s_1 \geqslant s_2 \geqslant s_n$，因而必可通过若干次（可能为零次）移动使第$n$列的列和为$s_n$。在移动时，先从含1最长的行的末位开始移动，目的是保持$\overline{A}_{n-1}$中列和向量的递减性。由最下面的行开始右移目的是保持A_{n-1}中行和向量的递降性。（这后一点不具有实质上的重要性。）

其次证明此作法可继续下去。为此记$\overline{A}_{n-1}$中的列和向量为$\overline{s'}=(\overline{s'_1}, \overline{s'_2}, \cdots, \overline{s'_{n-1}})$，分析向量$\overline{S'}$与向量$S^{(1)}=(s_1, s_2, \cdots, s_{n-1})$之间的关系。其第一个关系是：$\sum_{i=1}^{n-1} \overline{s'_i} = \sum_{i=1}^{n} \overline{s_i} - s_n$
$= \sum_{i=1}^{n} s_i - s_n = \sum_{i=1}^{n-1} s_i$。

如果$s_n = \overline{s_n}$，则得到矩阵$[\overline{A}_{n-1}, A_1]$时，原矩阵$A$未进行任何变动。即$\overline{A}' = A$。但因$s_n = \overline{s_n}$，所以得出：$\sum_{i=1}^{k} s_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} \overline{s'_i}$，及$\sum_{i=1}^{k} s_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} \overline{s'_i}$对$k=1, 2, \cdots, n-2$均成立。

如果$s_n > \overline{s_n}$，则依照我们的规则，将首先把第（$n-1$）列的下方（$\overline{s_{n-1}}-\overline{s_n}$）个“1”自左向右移。如果（$\overline{s_n}-\overline{s_n}$）$< s_n-\overline{s_n}$，则由于要保持行和不变，将要继续从第（$n-2$）列下方的（$\overline{s_{n-2}}-\overline{s_{n-1}}$）个“1”中从下往上地取出“1”自左向

右移到第n列，如此等等。因而可知，如果$\overline{s_n}$ $\overline{s_n}<s_n-\overline{s_n}$ $\leqslant\overline{s_{n-l-1}}$ s_n时，经过移动后得到的矩阵A_{n-1}的列和向量$\overline{s'}$与原矩阵A中的列和向量$\overline{s}$有下列关系：

当i 1，2，…，n l 2时，s'_i s_i；

当i $n-l$，$n-l+1$，…，n 1时，

$s'_i=\overline{s_i}$ $(s-s_{+1})-s$ 。

此外，s'_n $\geqslant s_{n-1}$ $(s_{n-}-s_{n-l})=\overline{s_{n-l}}$，由此可以推出：

当k 1，2，…，$n-l-2$时，$\sum_{i=1}^{k}s_i\leqslant\sum^{k}s_i$ $\sum_{i=1}^{k}s'_i$，

当$k=n-l-1$，n l，…，n 2时，由于

$$\sum_{i=k+1}^{n-1}s'+s_n-\sum_{=k}^{n}\overline{s_i}+s\leqslant\sum_{=k+2}^{n}s_i+s_n$$

$$\leqslant s_{k+}+\sum_{i=k+2}^{n}s_i=\sum_{k}^{n}s，\quad 即\sum_{i=k}^{n-1}s'\leqslant\sum_{i=k+1}^{n-1}s_i，$$

故有 $\sum_{i=1}^{k}s\leqslant\sum_{=1}^{k}\overline{s'_i}$成立。亦即$S^{(1)}<S'$仍成立。

因而代替A，可对$\overline{A_{n-1}}$用同样的办法处理，从而得到一个新矩阵$[A_{n-2}, A_2]$，其中A_{n-2}是一个$m\times(n-2)$型的最大矩阵，而A_2则为$m\times2$型的矩阵，其列和为s_{n-1}，s_n。由于每作一步，新的最大型矩阵均满足原最大型矩阵所满足的相似的条件，因而可以一直作下去，且每作一步后，新的最大型矩阵减少一列。故经n步后，可得出一个矩阵A，其列和向量恰是S。（证毕）

例 已给R （5，4，2，2，2 ，S （，，，2，2，2，2，1），求作（0，1）矩阵，取R为其行和向量，S为其列和向量。

解 作矩阵

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&0&0\\1&1&1&1&0&0&0\\1&1&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

其$\bar{S}=(5,5,2,2,1,0,0)$，显然有

$$S \prec \bar{S},$$

据上定理，确存在矩阵A，以R为其行和向量，以S为其列和向量。按证明中的作法，不难作出

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0&0&1&1&1\\1&0&1&0&1&1&0\\1&0&1&0&0&0&0\\0&1&0&1&0&0&0\\0&1&0&1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{matrix}5\\4\\2\\2\\2\end{matrix}$$
$$\begin{matrix}3&3&2&2&2&2&1\end{matrix}$$

像这样的矩阵，可以作出很多。譬如

$$\left\{\begin{pmatrix}1&1&0&0&1&1&1\\1&0&1&0&1&1&0\\0&1&1&0&0&0&0\\1&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&1&0&0&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1&1&0&0&1&1&1\\1&0&1&1&0&1&0\\1&0&1&0&0&0&0\\0&1&0&0&1&0&0\\0&1&0&1&0&0&0\end{pmatrix}\right\}$$

等都是分别以R与S作为它们的行和向量与列和向量的。这些矩阵，构成一个矩阵类，其中究竟有多少个这样的矩阵，这是组合数学里至今没有解决的问题。

这个定理的证明过程同时也是一个作法过程，具体作出所要求的矩阵。

上面所作的那个向量$\overline{S}$，实际上还可以作下面的理解：

已给向量$R=(r_1, r_2, \cdots, r_m)$，在平面上作方格图表如图5.8。计算在已给的向量$R=(r_1, r_2, \cdots, r_m)$中，大于或等于1的元素的个数记为$r_1^*$，大于或等于2的元素的个数记为$r_2^*$，如此类推。如右图5.8，$R=(5, 4, 2, 2, 2)$，$R^*=(5, 5, 2, 2, 1)$。

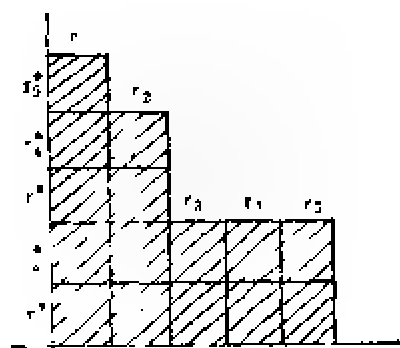


图5.8(费尔罗尔斯图表)

作出$r_1, r_2, \cdots, r_m$之后，将所占的方格打上阴影。第一行打阴影的方格的个数便是r_1^*，第二行打阴影的方格数便是r_2^*，如此类推。命所得的向量记作$R^*=(r_1^*, r_2^*, \cdots, r_n^*)$，统帅关系便是$S\prec R^*$。于是这个统帅关系可以改写成：

$$\begin{cases} s_1\geqslant s_2\geqslant\cdots\geqslant s_n; \ r_1^*\geqslant r_2^*\geqslant\cdots\geqslant r_n^*, \\ \sum\limits_{i=1}^{k} r_i^* \geqslant \sum\limits_{i=1}^{k} s_i \quad (k=1, 2, \cdots, n-1), \\ \sum\limits_{i=1}^{n} r_i^* = \sum\limits_{i=1}^{n} s_i \end{cases}$$

上面的定理5.2可应用到单纯的两分图上来，改写成如下形式：

定理5.3 已给二数列$r_1\geqslant r_2\geqslant\cdots\geqslant r_m$与$s_1\geqslant s_2\geqslant\cdots\geqslant s_n$，存在单纯的两分图$G=(X, Y; E)$其中$X=\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$，$Y=\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$，使有

$$d_G(x_i)=r_i \quad (i=1, 2, \cdots, m)$$
$$d_G(y_j)=s_j \quad (j=1, 2, \cdots, n)$$

其充分和必要条件是：

$$\sum_{i=1}^{k} r_i^* \geqslant \sum_{i=1}^{k} s_i \ (k=1, 2, \cdots, n-1)$$

$$\sum_{i\geqslant 1} r_i^* = \sum_{i=1}^{n} s_i$$

证 由定理5.2.求得（0，1）—矩阵A之后，作出与A相应的单纯两分图G（X，Y；E）便得。（证毕）

和（0，1）矩阵一样，可能有很多这样的单纯的两分图。但究竟有多少个，仍是一个没有解决的问题。

§3 两分图的并列集

所谓一个单纯图G（X，E）的**并列集**，是边集E的一个子集$F\subset E$，其中无二边共点。关于并列集的一般理论将在第十章加以论述。这里只想讲一个与两分图有关的著名定理，它在组合数学里有重要作用。

已给两分图$G=$（X，Y；E），其中$X=\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$，$Y=\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$。设$F\subset E$，且设

$F=\{(x_{i_1}, y_{j_1}), (x_{i_2}, y_{j_2}), \cdots, (x_{i_k}, y_{j_k})\}$

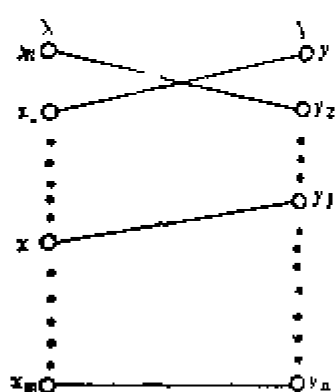


图 5 9

其中x_i各不相同，y_j也各不相同。这个F便是两分图的一个并列集。唯一的一边当然也是一个并列集。一个很自然的问题便是去找图G里的极大并列集，使它所含的互不相邻的边的个数达到极大。因为图是有限的，这样的极大并列集总是存在的。我们把极大并列集的维（即其中所含元素个数）记为ρ。

在两分图$G=$（X，Y；E）里我们还可以在顶集$X\cup Y$里任取一组顶$A\subset X\cup Y$，使图G中每一边至少有一顶含在A内，这样一个顶的集合叫做**径集**（transversal），譬如图G

的整个顶集便是这样一个集合。一个很自然的问题是去找极小的径集。我们把极小径集所含的顶数记作ρ'。若把一条河两岸的渡口、渡口与渡口之间的联系画作两分图G，那么极小径集便是两岸之间最少的这样的渡口，守住这些渡口，河的两岸交通便完全断绝。

和上节一样，我们也把这个问题反映到（0，1）一矩阵上来。两分图G（X，Y；E）的顶对应于相邻矩阵里的行和列（在下定理中统称为线）。每一边则对应于相邻矩阵里一个“1”。图G的并列集便是相邻矩阵里不同列、不同行的“1”所成的集合。极大并列集里所含的边数便是相邻矩阵里不同列不同行的“1”的极大个数。这个数ρ在研究（0，1）一矩阵时，把它叫做**项秩**（term rank）。顶既对应于矩阵的行和列，而行和列都是一条线。这个极小的数ρ'，便是相邻矩阵里极少的线数，含尽矩阵中的“1”。于此，有下著名的

定理5.4 （König，Egerváry，〔1931〕）在（0，1）一矩阵A里不同列不同行的“1”的极大个数ρ等于包含矩阵里所有的“1”的极小线数ρ'。

证 ρ'条线含尽矩阵A里的“1”，当然也含尽所有不同列不同行的“1”，故$\rho'\geqslant\rho$。以下往证$\rho\geqslant\rho'$。

设$\rho'=e+f$，即有e个行与f个列含尽矩阵A里的1，而使ρ'达到极小。可将A作行之交换与列之交换（这样的交换当然不影响ρ与ρ'的值），使所有的那e个行统统位于首e个位置，所有的f个列统统位于首f个位置。于是矩阵A变成下列形状：

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{pmatrix}$$

其中，A_1是$e\times f$型，A_2是$e\times(n-f)$型的，A_3是$(m-e)\times f$型的，A_4是$(m-e)\times(n-f)$型的0矩阵。

现在来研究A_2。首先$e\leqslant n-f$。否则可取这$n-f$个列来替代那e个行而使ρ'减小。在A_2中就e行来看，每个行至少应含一

个“1”。否则，去掉不含1的那个行将使ρ'减小。同样，就A_2的（$n-f$）个列来看，至少应有e个列含有“1”，否则取含“1”的列（小于e）来替代原取的e个行也将使ρ'减小。故子矩阵A_2应含e个“1”在不同的行和不同的列上。即A_2的项秩不小于e。同理可证，A_3的项秩不小于f。故

$$\rho \geqslant e+f=\rho' \text{ 或 } \rho \geqslant \rho'$$

于是$\rho=\rho'$。　　　　　　　　　　　　　　　　（证毕）

推理5.4　在两分图$G=(X, Y; E)$里，极大并列集的维，等于其极小径集的维。

由于定理5.3与推理5.4，是两分图的两个重要特性，特别是相应的定理在（0，1）-矩阵的理论里相当重要，所以在这里用组合数学的方法加以论证。至于一些特殊图的存在问题，和一般图的并列集的问题，将在以后加以论证。

习　题

1、试证明：$|E(K_{m,n})|=m\cdot n$。

2、试证明：如果图G是单纯的两分图，含n个顶点，则其边数$|E|\leqslant \frac{n^2}{4}$。

3、k-分图是其顶点集合可划分成k个子集合，以使得没有任何一条边的两个端点同在一个子集合中的图。完全k-分图是一个单纯图，其中不在同一子集中的任二顶点均有边相连的k—分图。n个顶点的完全m—分图，如果其中每一部分的顶点个数为$[\frac{n}{m}]$个或$[\frac{n}{m}]^*$个①时，记为$T_{m,n}$。试证明：

（1）$|E(T_{m,n})|=\binom{n-k}{2}+(m-1)\binom{k+1}{2}$，其中$k=[\frac{n}{m}]$。

（2）如果G是n个顶点的完全m—分图，则$|E(G)|\leqslant|E(T_{m,n})|$，且仅在$G\sim T_{m,n}$时才有等号成立。

4、k—维立方体是这样一种图，其顶点是0与1的有序k重组，当且仅当二个有序k重组仅有一个对应的分量不同时，二顶有边相联。试证，k维立方体图有2^k个顶点，$k\cdot 2^{k-1}$条边，而且是两分图。

---

①　今后用$[x]$表示不大于x的最大整数，用$[x]^*$表示不小于x的最小整数。

5．试求完全n点图K_n及完全两分图$K_{m,n}$的自同构群。

6．设G为两分图，证明G的顶点可编号使得G的相邻矩阵有形如：

$$\begin{pmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

其中$A_{21}=A'_{12}$。

7．找出一个不与任何k维立方体的部分子图同构的两分图。

8．试证明 单纯图G含有一个两分图的部分图H，使对所有的点$x\in X$（G的顶集），均有

$$d_H(x)\geq\frac{1}{2}d_G(x)\text{成立。}$$

9．设已知二个正整数序列$r_1\geq r_2\geq\cdots\geq r_m$，及$s_1\geq s_2\geq\cdots\geq s_n$试证明：存在一个单纯的两分图$G=(X,Y;E)$，其中$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$，$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$使$d_G(x_i)=r_i$，$d_G(y_j)=s_j$（$i=1,2,\cdots,m$，$j=1,2,\cdots,n$）成立的充分必要条件是

$$\sum_{i=1}^{m}r_i=\sum_{j=1}^{n}s_j\quad\text{及}\sum_{i=1}^{m}\min\{k,r_i\}\geq\sum_{j=1}^{k}s_j$$

对$k=1,2\cdots,n-1$均成立。

10．已给两个序列 $P=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$，$Q=(q_1,q_2,\cdots,q_n)$，求在顶点$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$上存在一个有向图$G=(X,U)$使得$d^-(x_i)=p_i$与$d^+(x_i)=q_i$对$i=1,2,\cdots,n$均成立的充分必要条件。

11．设$R=(r_1,r_2,\cdots,r_m)$和$S=(s_1,s_2,\cdots,s_n)$是非负整数的两个不增数列，分别用R'，S'表示数列$(r_2,\cdots,r_m)$及$(s_1-1,s_2-1,\cdots,S_{r_1}-1,S_{r_1+1},\cdots,s_n)$。

（1）试证明 (R,S)可由单纯的两分图来实现的充分必要条件是(R',S')可由单纯的两分图来实现。

（2）利用（1）的思想描述一个实现(R,S)的单纯两分图的算法。如果这样的实现存在的话。

12．设$R=(5,4,4,2,1)$，$S=(5,4,4,2,1)$试证明：这一对向量偶(R,S)不能由单纯的两分图来实现。

13．设已知二非负整数的不增序列$(r_1,r_2,\cdots,r_m)$，$(s_1,s_2,\cdots,s_n)$，利用定理2的证明中所描写的构造矩阵的过程，描述一个作图的过程，作出一个两分图$G=(X,Y,E)$，使$d_G(x_i)=r_i$，$d_G(y_j)=s_j$，对于$i=1,2,\cdots,m$，$x_i\in X$，$j=1,2,\cdots,n$，$y_j\in Y$都成立。

14．不使用定理4直接证明 在两分图$G=(X,Y;E)$中极大并列集的维等于其极小径集的维。

第六章　网络上的流

§1　网　络

上章我们曾经讲过大洋两岸港口运输问题，和市场供应问题，这些，实际上是本章所要讲的一般问题的几个特例。

什么是一个网络？已给有向图 $G=(X, U)$，顶集X可以分成三类。一类是子集$S\subset X$，有一批物资要自顶集S发出，称为发点。一类是子集$T\subset X$，需要收到一批物资，称为收点。一类是中转站$R\subset X$。

S、$T\neq\varnothing$，$S\cap T$、$T\cap R$、$S\cap R=\varnothing$，$S\cup R\cup T=X$。其中R可以是空集。

在每条弧(x,y)上给定一个非负数$c(x,y)$，称为**容量**。在运输工作中，弧(x,y)上的最大负荷量是$c(x,y)$。在一般情况下，当然要求图是联接的。这样一种特殊的构形，称为**网络**，把它记作$\mathcal{N}=[N,\mathscr{A}]$和一般的有向图有所区别。在一个网络上，主要的问题是它的最大运输量是什么？怎样达到？例如下图6.1便是一个网络：

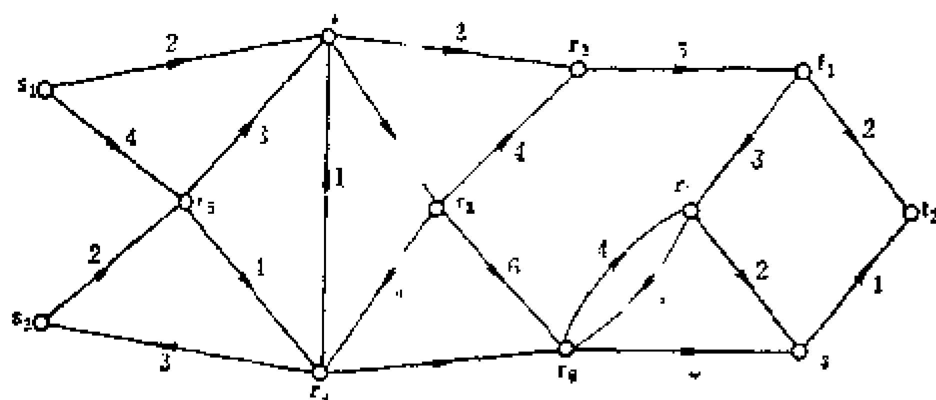


图　6.1

在图6.1甲，$S=\{s_1, s_2\}$，$T=\{t_1, t_2, t_3\}$，

$$R=\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7\},$$

每个弧旁标出的数，是这条弧的容量。譬如

$$c(s_1,r_1)=2,\ c(r_4,s_2)=3,\ \cdots.$$

所有在发点"s"上的弧，不一定全是自s发出的。在收点"t"上的弧，也不一定全是指向"t"的。

在网络的弧上，再给出一个非负函数$f(x,y)$，称为网络上的流，即在网络上，当物资运行时，通过弧(x,y)的流量是$f(x,y)$。当然，应有

$$0\leqslant f(x,y)\leqslant c(x,y)。\qquad (x,y)\in U。$$

因为物资通过每条弧时，其通过量当然不能超过这条弧的负荷量。凡是这样的流，称为**网络上的可行流或许可流。**

由于S中的点是发点，虽然可能有回流，但总有一个总发出量。T中每一点是收点，虽然运到一批物资，可能再度运出，但最后总收到一定数量的物资。中转站，则只起中转作用收到多少就立刻转运出去。收点集T上的总收量，当然只能等于发点S上的总发量。设f是一个流，我们总用

$f(x,N)$记一点x的总发量，

$f(N,x)$记一点x的总收量。

若用v记最后的总收量或总发量，则v称为流f的值，记作$v=v(f)$。

故一个网络上的一个可行流f，应满足以下一些线性关系式：

$$(1)\quad\begin{cases}(1.1)\quad \sum\limits_{x\in S} f(x,N)-\sum\limits_{x\in S} f(N,x)=v \\ (1.2)\quad f(x,N)-f(N,x)=0 \qquad (x\in R) \\ (1.3)\quad \sum\limits_{x\in T} f(N,x)-\sum\limits_{x\in T} f(x,N)=v \\ (1.4)\quad 0\leqslant f(x,y)\leqslant c(x,y) \qquad (x,y)\in U\end{cases}$$

例 见图6.2。

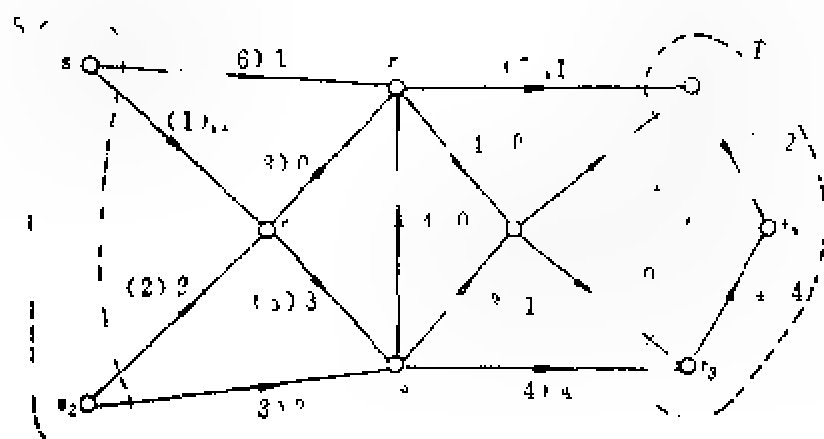


图 6.2

每条弧上括号里的数是该弧的容量 c，不在括号的数是这条弧上的流量。$\{r_1, r_2, r_3, r_4\}$ 四点是中转站，收进量与发出量相抵，自s_1，s_2二项发出的总流量是$1+1+2+2=6$，故

$$v(f)=6。$$

在收点t_1，t_2，t_3，总收入量也是6。

为了简化网络的收与发，往往假定再给一个总发点s和一个总收点t，总收总发。自s到每个发点s_i的联弧，可假定其上的容量都是∞。自每个收点发到总收点t各联一弧，也假定其上的容量是∞。经过这样改进之后，原来的发点s与收点t，就都变成了中转站。例如图6.2那个网络，加进新发点s与新收点t，可绘制成如下形式（图6.3）：

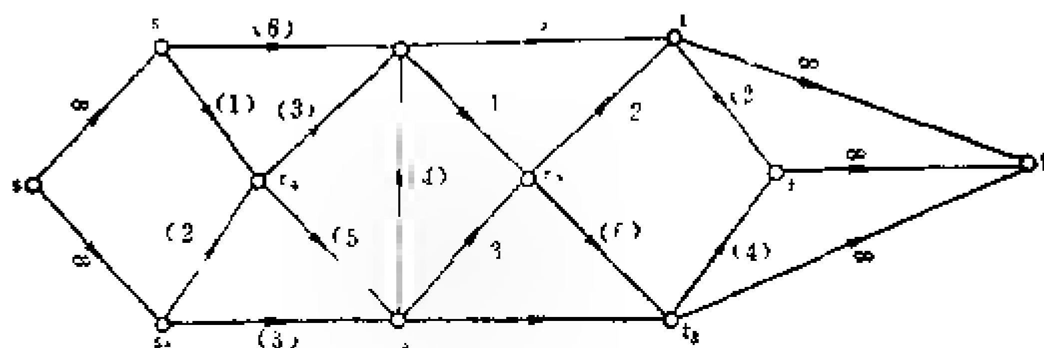


图 6.3

§2 流量的调整

已给网络$\mathscr{N}_T=[N,\mathscr{A}]$，首先一个问题是在这个网络上是否有流可以通过？这是没有问题的，因为总可取$f=0$，即在每个弧上，流量都取为0。问题是已给一个可行流f（满足条件(1)），在这个网络上，流f是否可以调整，意即是否可以把流f的值，尽可能地加大，使这个运输网络，发挥最大作用，下面先举例来说明调整方法，也就是所谓迭代方法。这里用的是Ford与Fulkerson的标号方法，以图6.4（一）所示之网络为例。

第一步：将发点标成（$-$，$\varepsilon(s)=\infty$）好像是某些地方运到s，其量没有限制。自s出发找一条弧，譬如（s，x_2），其终点x_2没有标号。将x_2标成（s^+，$\varepsilon(x_2)$），s^+表示x_2是自s走来的，其中

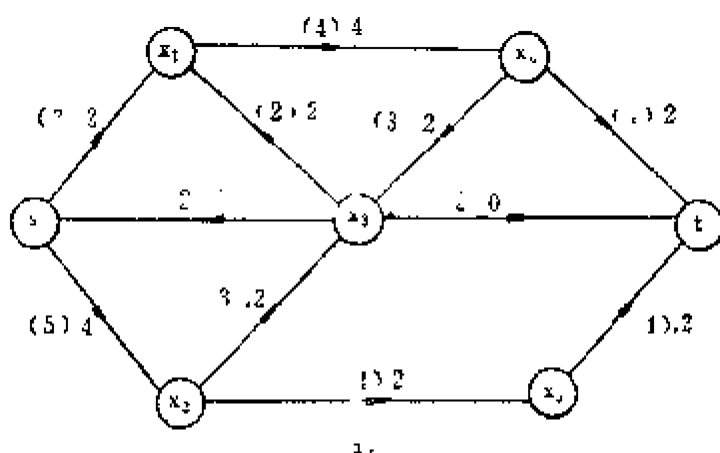


图 6.4(一)

$$\varepsilon(x_2)=\min(\varepsilon(s),\ c(s,x_2)-f(s,x_2))$$

在图6.4（一）中：$\varepsilon(x_2)=1$，故x_2标号为（s^+，1）。

第二步：一般，设x已标号为（$z^\pm$，$\varepsilon(x)$），而弧(x,y)的另一端y没有标号，便将y标号为

$$(x^+,\ \varepsilon(y)),$$

其中 $\varepsilon(y)=\min(\varepsilon(x),\ c(x,y)-f(x,y))$，

若x已标号，而y是弧(y,x)的另一端没有标号，便将y标号为（x^-，$\varepsilon(y)$），其中

$$\varepsilon(y)=\min(\varepsilon(x),\ f(y,x)),$$

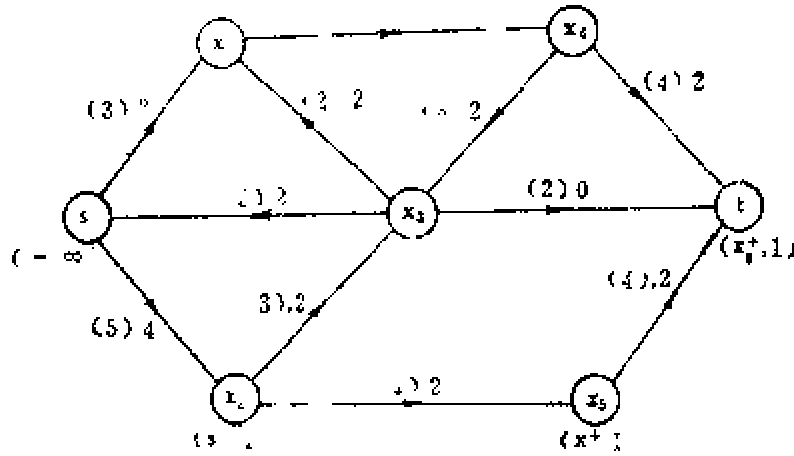


图 6.4（二）

第三步：若标号到一项x，自x发出或发入x的弧，其另一端y虽都没有标号，但按以上标号方法，所得的$\varepsilon(y)$都是0。此时，沿着这样的线路的标号便停止，再回到第一步或第二步另找途径。

第四步：设上面的标号，可以一直进行到t（称为进行到底），而t的标号是（$x^{\pm}$，$\varepsilon(t)$），此时，自s到t显然有一条链（或路）自s走到t。不过其中可能有些弧是顺着s到t的总方向的，也可能有些弧是逆着s到t的总方向的。这些方向，都在每个项x标号的第一个记号$z^{\pm}$表示出来，又最后所得的$\varepsilon(t)$显然是这条链上最小的$\varepsilon(x)$。

第五步：自项t起，沿所得的那条链，在每条弧上凡是标号z^+的其流量加上$\varepsilon(t)$，凡是标z^-的减去$\varepsilon(t)$，其他各个弧上的流量f不动。这最后一步，便是流量的调整，使在收点t，增加收量$\varepsilon(t)$。

例如图6.4（二），〔s，(s,x_2)，x_2，(x_2, x_5)，x_5，(x_5, t)，t〕显然是一条自s到t的链，其上每一项均已标号。将最后的$\varepsilon(t)=1$加到每条弧的流量上，其他弧上的流量不动，

便得一个新流f'，其量增加1，如图6.4（三）所示。

最后，将所有的标号抹去，再就新流f'，进行上面的标号迭代。

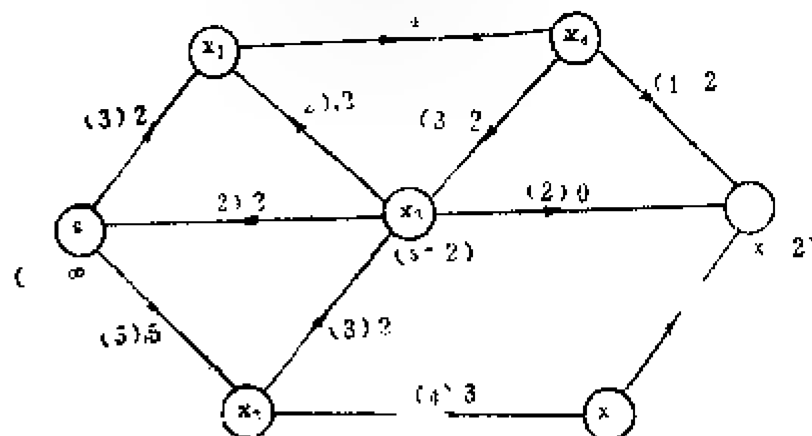


图 6·4（三）

现在来考察弧(x_3, s)。s标号为（$-$，∞），x_3标号为（s^-，2），在弧(x_3, t)上，t标号为（x_3^+，2）得链〔s，x_3，t〕，在弧(x_3, t)上流量增加2，在弧(x_3, s)上流量减去2，其他弧上流量均不动，得新流总流量增加2，参看图6.4（四）。

最后，再就弧(s, x_1)来看，x_1可以标号为（s^+，1），x_3可以标号为（x_1^-，1），x_2标号为（x_3^-，1），x_5标号为（x_2^+，1）t标号为$(x_5^+$，1），进行调整得新网络图6.4（五）。

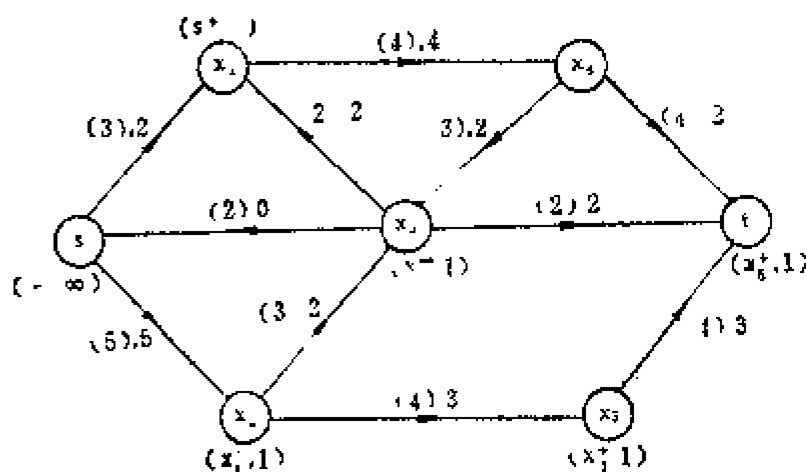


图 6 4（四）

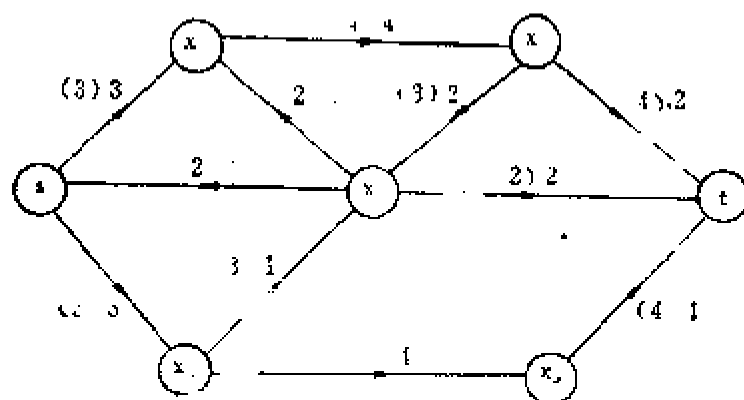


图 6 4(五)

在这个新网络上，便已不能再自s出发，进行标号迭代，迭代便到此为止，所得的流，其流量是8。

设已给网络$\mathscr{N}_T$ 〔N，$\mathscr{A}$〕，每条弧上的容量，都是非负整数。又最初给出的那个初始流f是一个非负整数，f的值当然是一个非负整数。从上面所讲的调整迭代来看，f的值，每次增加一个整数（至少是1）。由于网络是有限的，调整迭代必至有限次而终止，所得最后的流值，必将是一个整数。这就是所谓流的整数性。

§3 极大流量——极小截量定理

在上节我们提到了标号迭代方法，初始流f是任给的（满足作为流的条件），在网络上就初始流进行调整迭代，其调整过程是各色各样的。虽然最后都不得不停止，但最后所得的流值，是不是都是一样的达到极大？这在理论上并没有加以论证。

在第三章，我们曾经讲过一个联接图的初级余圈，在网络上有一个相应的概念叫做截集。

在网络$\mathscr{N}_T$ ·〔N，$\mathscr{A}$〕里任取顶的子集$X\subset N$，其中包含发点s，不含收点t，则X的补集$N-X$ $\bar{X}$将包含收点t，而不含发点s。作$\mathscr{N}_T$的部份图〔X，$\bar{X}$〕包含所有自X发到

$\overline{X}$的弧，这个弧集，截断了自s到t的一切通路，叫做隔断发点s与收点t的截集。这些弧上容量之和，叫做**截量**，记作

$$C(X,\ \overline{X}).$$

去掉截集里所有的弧之后，s与t被隔断，所得网络便不能再有流自s通向t，即其流值只能是0。

因为网络是有限的，其截集也是有限个的。因而在截集中必有一个或若干个其截量极小，这些截集，称为**极小截集**。其截量称为**极小截量**。尽管极小截集可能有所不同，但极小截量则是唯一确定的。

同样，也存在不同的极大流，但极大流量则是唯一确定的。于此，有下重要定理：

定理6.1（极大流量-极小截量定理） 在任何一个网络上，极大流量等于极小截量。

证 1．首先往证，对任一个自s发到t的可行流和任一个截集$[X,\ \overline{X}]$，其中$S\in X$，$t\in\overline{X}$，恒有

$$v(f)=f(X,\overline{X})-f(\overline{X},X)\leqslant C(X,\overline{X}).$$

f既是一个自S到t的可行流，f便应满足条件（1）中前三个

$$f(s,N)-f(N,s)=v$$

$$f(x,N)-f(N,x)=0 \qquad x\neq s,t$$

$$f(t,N)-f(N,t)=-v$$

将此三者对X中的点进行求和，由于$s\in X$，$t\in\overline{X}$，故

$$v=\sum_{x\in X}f(x,N)-\sum_{x\in X}f(N,x)=f(X,N)-f(N,X),$$

但 $N=X\cup\overline{X}$，代入上式，便有

$$\begin{aligned}v&=f(X,\ X\cup\overline{X})-f(X\cup\overline{X},\ X)\\&=f(X,\ X)+f(X,\overline{X})-f(X,\ X)-f(\overline{X},\ X)\\&=f(X,\ \overline{X})-f(\overline{X},\ X).\end{aligned}$$

2．往证，有流f和截集〔X，$\overline{X}$〕，使

$$f(X,\ \overline{X})=C\ [X,\ \overline{X}],$$

$$f(\overline{X},\ X)\quad 0$$

由条件(1.4)对任一个流f与任一个截集〔X，$\overline{X}$〕恒有

$$f(X,\ \overline{X})\leqslant C(X,\ X),$$

故恒有

$$f(X,\ X)-f(X,\ X)<C(X,\ X),$$

能证恒存在流f与截集〔X，$\overline{X}$)使上二等式成立，则

$$v\quad f(X,\overline{X})\quad C(X,\ \overline{X})$$

因而v达到极大，$C(X,\overline{X})$达到极小。

设f是一个极大流，作顶集X如次：

（1）首先取$s\in X$。

（2）设$x\in X$，而$f(x,y)<c(x,y)$，顶y命其属于X。

设$x\in X$，而$f(y,x)>0$顶y也命其属于X。往证这样循环定出的顶集X，决不含收点t。否则可考虑下二情况（极据定义，t可能属于X的情况）：

(i)若s到t直接有弧(s,t)且$f(s,t)<c(s,t)$。

则在这个弧上，加大$f(s,t)$使流f的值增大，这和f极大相矛盾。

(ii)若s到t有链相通，其中有顶$y\in X$，而$f(y,t)<c(y,t)$，则自s到y有一连串的弧，与s到t的总方向相同的，在其上$f(x_1,x_2)<c(x_1,x_2)$；而其与s到t的总方向相反的，有$f(x_2,x_1)>0$。按上节流量的调整方法，可以沿着这条链，加大f的值，这也和f是极大相矛盾。

于是自极大流f定出截集(X，$\overline{X}$)，其中

$$s\in X,\ t\in\overline{X},\ X\cup\overline{X}\quad N。$$

对于这样的截集，有（据上截集的定法）：

$$f(x,y) = c(x,y) \qquad x\in X,\ y\in \overline{X}$$
$$f(y,x) = 0 \qquad x\in X,\ y\in \overline{X}。$$

因有 $\quad v = f(X,\overline{X}) - f(\overline{X},X)$

$$= f(X,\overline{X}) = C(X,\overline{X}),$$

但因总有 $\quad v\leqslant C(X,\overline{X})$。

现二者既相等，故v达到极大，而$C(X,\overline{X})$是极小。 （证毕）

从上节流的调整，和本节定理6.1及定理6.1的证明过程可知：

任给网络$\mathscr{N}_T = [N,\mathscr{A}]$，首先总可找到可行流，（因总可取$\varnothing$—流即每条弧上的流量都取为0，这个$\varnothing$—流就是一个可行流）然后对这个可行流进行调整，一直调整到不能再进行调整为止，得流f。此时必将出现一种情况，即自发点s到收点t的每一条链上总出现弧$(x,\overline{x})$与s到t的总方向同向，而其$f(x,\overline{x}) = c(x,\overline{x})$。或者出现弧$(\overline{x},x)$与$s$到$t$的总方向相反但$f(\overline{x},x) = 0$。所有这样的点$x$，构成一个子集$X$，所有的点$\overline{x}$，构成子集$\overline{X}$，$(X,\overline{X})$构成一个截集与最后所得的流$f$相应，这个截集$(X,\overline{X})$和相应的流$f$具特性

$$f(X,\overline{X}) = C(X,\overline{X}),$$
$$f(\overline{X},X) = 0,$$
$$v(f) = C(X,\overline{X}),$$

故f是一个极大流。

极大流量—极小截量定理非常重要。将其与整数性质联合使用，可以解决很多组合问题（当然也包含图论的问题在内）。

若将约束条件改成$l(x,y)\leqslant f(x,y)\leqslant C(x,y)$，其中$-\infty\leqslant l\leqslant C\leqslant +\infty$，则问题就复杂得多。首先是可行流的存在问题，然后才是极大流问题，这个问题将在本章§7加以研究。

§4 极大流量——极小截量定理的简单应用

应用1 **运输网络** 已给两分图$G=(X, Y; E)$。将X到Y的联边改成自X到Y的弧，给出每条弧(x_i, y_j)上的容量c_{ij}，便得一个网络。X中的点都是发点，Y中的点都是收点。增添新发点s与新收点t，再自s联到X中的点，得弧，给以适当的容量，自Y中的点联到t，得弧，给以适当的容量。这样便得网络$[N, \mathscr{A}]$，如下图6.5所示：

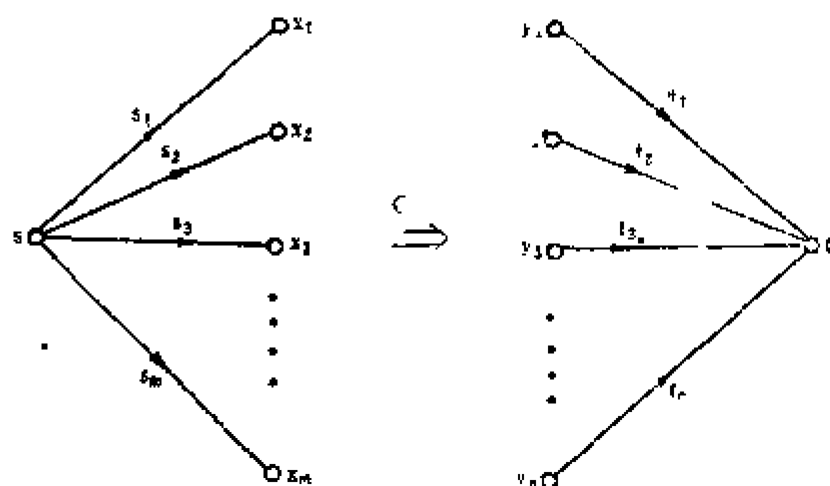


图 6.5

我们称这种网络为（**两分**）**运输网络**。使用这样的网络，可以证König-Egerváry定理（定理5.4）如次：取

$$s_i=1, \quad (i=1, 2, \cdots, m)$$
$$t_j=1, \quad (j=1, 2, \cdots, n)$$
$$c_{ij}=\infty。$$

第一、如果弧(s, x_i)上有流量为1，通过弧(x_i, y_j)送到y_j再通过(y_j, t)送到t，则任何流便不能再有流通过x_i与y_j。故极大流量等于点互质的弧(x_i, y_j)的条数，亦即极大流量等于两分图里的极大并列集所含的边数。

第二、极小截集只能是(s, x_i)中的某些弧与(y_j, t)中的某些弧，故极小截集是原来两分图中极小径集。

据定理6.1便得König—Egervöry定理。

应用2 **相异代表系** 设有n个人，交叉组成m个不网的学术团体。要在这n个人中选出m个人做代表，各代表一个不同的团体，是为相异代表系。像第五章那样，作出代表这种关系的两分图，再作出两分运输网络，每条弧给以容量如图6.5所示。所有的发出弧(s, x_i)，其容量$c(s, x_i)=1$。所有的收入弧(y_j, t)，其容量也是$c(y_j, t)=1$，表示一个团体只能选取一个人做为代表。若这个网络的极大流f，饱和所有的发出弧$(s, x_i)(i=1, 2, \cdots, m)$，则恰好每一个不同的团体，有一个不同的人，做为它的代表，便得一个相异代表系。据定理6.1,所有的发出弧此时成为网络的一个极小截集，其极小截量是m。反之，设所有的发出弧是网络的一个极小截集，则据定理6.1，必有极大流f,饱和这个截集的每条弧。因而每个不同的团体,有一个不同的代表。取k个团体X_{i_1}, X_{i_2}, …, X_{i_k}记作S_k，命$Y_k = X_{i_1} \cup X_{i_2} \cup \cdots \cup X_{i_k}$是这$k$个团体所含成员的集合，$X-S_k \cup Y_k$将成为两分图的一个径集。故弧集$(s, X-S_k)$与弧集$(Y_k, t)$构成网络的一个截集。所有的发出弧成为一个极小截集，其充分和必要条件便是对任取的S_k有：

$$|X-S_k|+|Y_k|\geqslant m,$$

或 $$|S_k|\leqslant|Y_k|。\quad (k=1, 2, \cdots, m)$$

这便是有名的

定理6.1 (M.Hall)任给其中含n个元素的集$Y=\{1, 2, \cdots, n\}$及其m个子集X_1, X_2, …, X_m这些子集有相异代表系的充分和必要条件是

$$|S_k|\leqslant|Y_k|, \quad (k=1, 2, \cdots, m)$$

其中S_k是m个子集中任取的k个子集，Y_k是这k个子集的合。符号“| |”表示集合所含元素的个数。

应用3 **动态流** 最后再举一个例，说明极大流量=极小

截量定理的应用。

设有一个汽车运行线路如下（见图6.6）：

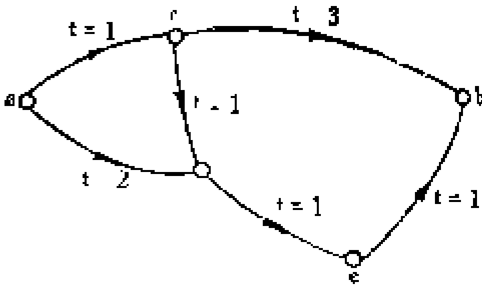


图 6 6

在a,c,d,e各点均有汽车存放。设其存放量分别为S_a,S_c,S_d,与S_e. b点紧急需用汽车，须从这些点调运。各条线路上的t值，表示汽车运行所需单位时间数，即从a到c，汽车运行，需一个单位时间，等等。从一点顺线路在每一个单位时间内所能运到另一点的汽车辆数为C_{ij}，在本例便是C_{ac}、C_{ad}、C_{cd}、C_{cb}、C_{de}与C_{eb}。再假定在一个单位时间内每个点可以发出的汽车辆数为p，在本例分别是p_a,p_c,p_d与p_e.问题是在T个单位时间后，b处最多能收到多少辆汽车。譬如T 5，这个运输图，可化成网络如下（图6.7）：

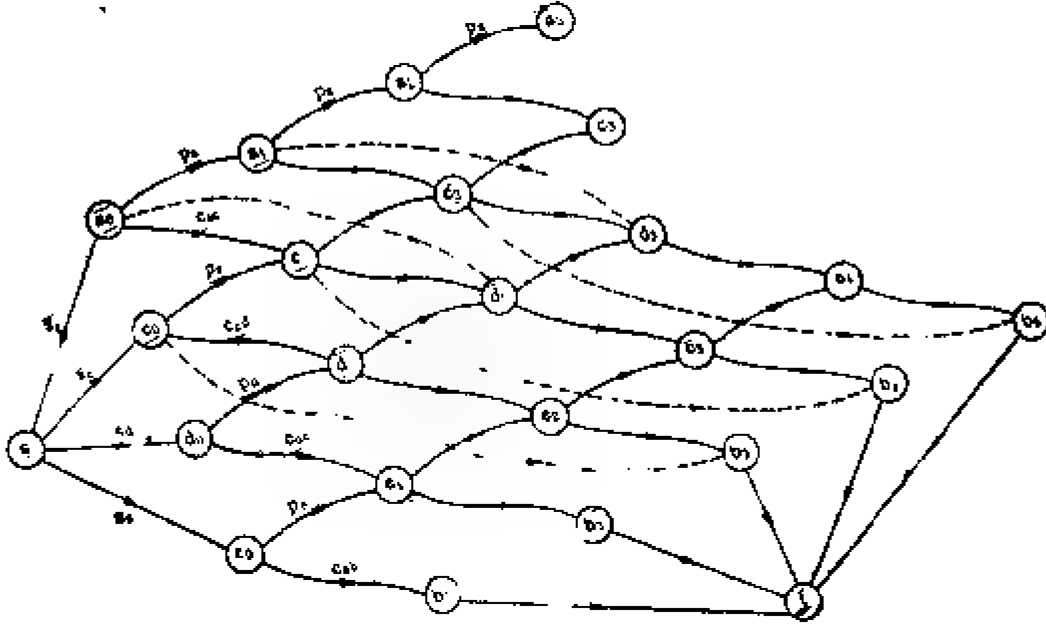


图 6 7

取s为总发点，t为总收点。在5个单位时间后，t点上（亦即在b处）所能收集到汽车的极大辆数便是这个网络的极大流。图中a_2到d_3无弧相联，表示：在两个单位时间以后，a送车到

d，需两个单位时间，再从d送到b，又需两个单位时间，共需6个单位时间，已在时限5个单位时间以外。a_3到c_3无弧相联，其意义是一样的。

网络中横行的弧其上的容量为pa pc,pd,pe等，下行的弧，其上的容量为C_{ac}，…，等诸b到t的弧，其上的容量都取为∞。

这个例可能有比较大的实际意义。

§5 供求定理

设在一个交通网上有若干个货源，和若干个需要供应物资的销售点。但货源处的供应量有一定的限制，要求供应的销售点，则有一定的最低要求，运输网上的运输能力，也是有一定的限度的。在这样的情况下怎样尽可能地满足要求，是为供求问题。

设货源地点用S表示，销售地点（要求供应的地点）用T表示，其他都是中转站，用R表示。设每条弧上（运输线）的容量（最大负荷量）是C。在S里各点的最大供应量分别是$a(\geqslant 0)$。在T里各点的最低需求量是$b(\geqslant 0)$。将运输网转化为网络$\mathscr{N}=[N, \mathscr{A}]$。根据具体情况，这样的网络在其上的流$f$如果满足要求，便应满足以下诸条件：

$$(5.1)\qquad f(x,N)-f(N,x)\leqslant a(x)\qquad (x\in S)$$

$$(5.2)\qquad f(x,N)-f(N,x)=0\qquad (x\in R)$$

$$(5.3)\qquad f(N,x)-f(x,N)\geqslant b(x)\qquad (x\in T)$$

$$(5.4)\qquad 0\leqslant f(x,y)\leqslant c(x,y)\qquad (x,y)\in \mathscr{A}.$$

设有流f满足这些条件我们便称原来的问题是可行的，否则称它为不可行的。

例 如图6.8

$S=\{1,2\}$，$T=\{7,8\}$，$R=\{3,4,5,6\}$，其上未定向的联线表示可以在这条线上按两个方向

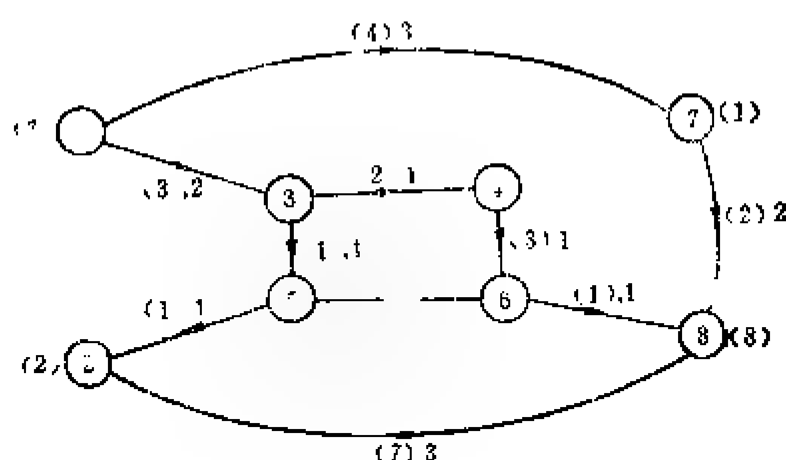


图 6 8

运行。每条线上括号里的数是弧的容量。1，2二点是发点，其旁的数字是最大供应量。7，8二点是收点，其旁的数字是最低需求量。

取2处的2单位货物，全部供给8，在8处至少尚缺6个单位货物。但在网络里，能够运进2，再转运到8或直接运送到8的运输能力最大是4，不能满足要求。虽然原估计的供求相抵，但要求不能满足。所以原提的问题是不可行的。按照图6.8的运送方式，1处尚余物资二个单位运送不出，7处虽能满足要求，8处尚缺二个单位物资未能满足。

由此可知，在这样的网络上要满足供与求的要求，尚须满足一定的条件。於此，有下

定理6.3 条件（5.1）—（5.4）是可行的，其充分和必要条件是

$$(5.5)\quad b(T\cap X)-a(S\cap X)\leqslant C(X,\overline{X})$$

对每一$X\subset N$均成立。

证 必要性 设有流f，满足条件（5.1）—（5.4），将（5.3）改变不等式的方向，然后将（5.1），（5.2），(5.3)对$x\in X$进行加法。自（5.1）得

$$\sum_{\bar{x}\in\bar{X}\cap S}(f(\bar{x},N)-f(N,\bar{x}))\leq a(S\cap\bar{X}),$$

自（5.2）得

$$\sum_{\bar{x}\in\bar{X}\cap R}(f(\bar{x},N)-f(N,\bar{x}))=0,$$

自（5.3）得

$$\sum_{\bar{x}\in\bar{T}\cap X}(f(\bar{x},N)-f(N,\bar{x}))\leqslant -b(T\cap\bar{X}),$$

将这些等式和不等式相加：

$$f(X,N)-f(N,\bar{X})\leq a(S\cap\bar{X})-b(T\cap\bar{X}),$$

取 $N=X\cup X$，代入上式，并移项，便得

$$b(T\cap\bar{X})-a(S\cap X)\leqslant f(X,X)-f(\bar{X},X),$$

再引用（5.4）便得

$$b(T\cap\bar{X})-a(S\cap\bar{X})\leq C(X,X)。$$

充分性 加进新发点s与新收点t，联弧(s,S)与弧(T,t)给定各弧的容量为

$$c^*(s,x)=a(x)\qquad x\in S$$

$$c^*(x,t)=b(x)\qquad x\in T$$

$$c^*(x,y)=c(x,y)\qquad (x,y)\in\mathscr{A}$$

这样便自原来的网络$\mathscr{N}_T[N,\mathscr{A}]$，得出新网络$\mathscr{N}_T^*=[N^*,\mathscr{A}^*]$。

往证在条件(5.5)下,新网络$\mathscr{N}_T^*$将取(T,t)作为一个极小截集。

设$(X^*,\bar{X}^*)$是任一截集，$X^*=s+X,\bar{X}^*=t+\bar{X}$，

于是

$$C^*(X^*,\bar{X}^*)-C^*(T,t)=C^*(X+s,\bar{X}+t)-C^*(T,t)$$

$$=C^*(X,t)+C^*(s,\bar{X})+C^*(X,\bar{X})+C^*(s,t)$$

$$-C^*(T,t)$$

$$=b(T\cap X)+a(S\cap\bar{X})+C(X,\bar{X})-b(T)$$

$$= b(T\cap\overline{X})+a(S\cap\overline{X})+C(X,\overline{X})$$

故$C^*(T,t)$是新网络$\mathcal{N}_I^*$的极小截集，当且仅当(5，5)能成立。

由极大流是一极小截量定理新网络$\mathcal{N}_I^*$里存在极大流f^*，饱和所有的弧(T,t)，回到原网络$\mathcal{N}_I$上来，流f显能满足(5.2)与(5.4)，f^*在原网络上派生流f，且由于

$$a(x)\geqslant f^*(s,x)=f^*(x,N)-f^*(N,x)$$

$$=f(x,N)-f(N,x)\qquad x\in S$$

$$b(x)=f^*(x,t)=f^*(x,N)-f^*(N,x)$$

$$=f(x,N)-f(N,t)\qquad x\in T$$

条件(5.1)与(5.3)也能满足。

§6 对称的供求定理

定理6.3解决了供求问题的一方面。可是我们还可以对供求问题，提出更高的要求，即在供应点所能供应的数量在$a(x)$与$a'(x)$之间，假定其中$0\leqslant a(x)\leqslant a'(x)$。而在销售点所希望收到的数量在$b(x)$与$b'(x)$之间，其中$O\leqslant b(x)\leqslant b'(x)$，将这样运输系统化成网络

$$\mathcal{N}_I=[N,\mathcal{A}],$$

如果能在这个网络上给出流f，满足一切要求，这个流f便应满足以下条件：

$$(6.1)\qquad a(x)\leqslant f(x,N)-f(N,x)\leqslant a'(x)\quad x\in S$$

$$(6.2)\qquad f(x,N)-f(N,x)=0\qquad x\in R$$

$$(6.3)\qquad b(x)\leqslant f(N,x)-f(x,N)\leqslant b'(x)\quad x\in T$$

$$(6.4)\qquad 0\leqslant f(x,y)\leqslant c(x,y)\qquad (x,y)\in\mathcal{A}$$

其中　$0\leqslant a(x)\leqslant a'(x)$，　$0\leqslant b(x)\leqslant b'(x)$。

为了解决这个问题，首先作一个网络$\mathcal{N}_I^*=[N^*,\mathcal{A}^*]$，将原问题转化为新网络$\mathcal{N}_I^*$上求极大流的问题。在原网络上增加四顶$s$、$t$、$u$、$w$、并联弧如下：

自s到S中各顶联弧(s,x)，自T中各顶到t联弧(x,t)，自u到S中各顶联弧(u,x)，自T中各顶到w联弧(x,w)，再联弧(t,s)，(s,w)与(u,t)。除原有的各弧上的容量保持不变外，新联各弧，给定容量如下：

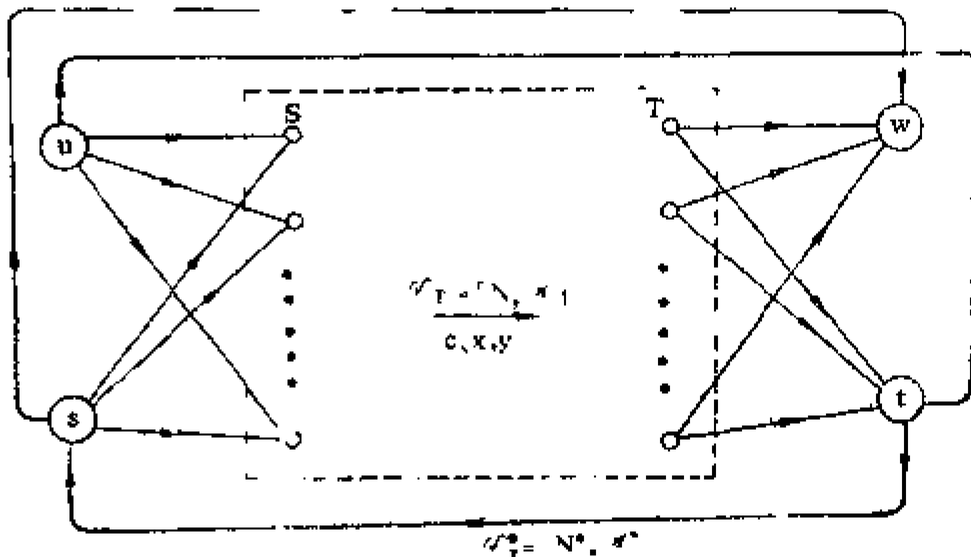


图 6 9 $\mathscr{N}_T^* = [N^*, \mathscr{A}^*]$

$$C(s,x) = a'(x) - a(x) \qquad x \in S$$
$$C(u,x) = a(x) \qquad x \in S$$
$$C(x,t) = b'(x) - b(x) \qquad x \in T$$
$$C(x,w) = b(x), \qquad x \in T$$
$$C(u,t) = b(T),$$
$$C(s,w) = a(S),$$
$$C(t,s) = \infty.$$

所得新网络，便取u为发点，w为收点。往证

引理6.1 原网络有可行流f的充分和必要条件是新网络$\mathscr{N}_T^* = [N^*, \mathscr{A}^*]$有极大流$f^*$，其值为$a(S)+b(T)$。

证 必要性 设原网络$\mathscr{N} = [N, \mathscr{A}]$有可行流$f$。在新网络$\mathscr{N}_T^* = [N^*, \mathscr{A}^*]$上作相应的流$f^*$，取

$$f^*(s,x) = f(x,N) - f(N,x) - a(x) \qquad x \in S$$
$$f^*(u,x) = a(x) \qquad x \in S$$

$$f^*(x,t)=f(N,x)-f(x,N)-b(x) \qquad x\in T$$

$$f^*(x,w)=b(x) \qquad x\in T$$

$$f^*(u,t)=b(T)$$

$$f^*(s,w)=a(S)$$

$$f^*(t,s)=f(S,N)-f(N,S)$$

$$f^*(x,y)=f(x,y) \qquad (x,y)\in \mathscr{N}_T$$

由于流f是网络$\mathscr{N}_T=[N,\mathscr{A}]$上的许可流，应有

$$a(x)\leqslant f(x,N)-f(N,x)\leqslant a'(x) \qquad x\in S$$

故 $$f^*(s,x)\leqslant a'(x)-a(x)=c(s,x)$$

同理，可以验证f^*是新网络$\mathscr{N}_T^*=[N^*,\mathscr{A}^*]$上的许可流。$f^*$的值是

$$\sum_{x\in S} f^*(u,x)+f^*(u,t)$$

$$=a(S)+b(T)=f^*(s,w)+\sum_{x\in T} f^*(x,w),$$

但弧集$\{(u,x),\ x\in S\}$与弧(u,t),或弧集$\{(x,w)\ x\in T\}$与弧(s,w)均构成新网络的截集，故据极大流量—极小截量定理

$$V(f^*)=a(S)+b(T)$$

达到极大。

充分性 设f^*是新网络$\mathscr{N}_T^*=[N^*,\mathscr{A}^*]$自$u$发至$w$的极大流。其值是$a(S)+b(T)$。往证原网络$\mathscr{N}_T=[N,\mathscr{A}]$有可行流$f$。

设f^*在网络$\mathscr{N}_T=[N,\mathscr{A}]$上派生流$f$，往证$f$必是可行的。首先$f$是一个流，自$S$运行到$T$，(6.2)，(6.4)能满足。其次当$x\in S$，有

$$f^*(u,x)+f^*(s,x)=f(x,N)-f(N,x),$$

但因 $$v(f^*)=a(S)+b(T),$$

必有 $$f^*(u,x)=a(x), \qquad x\in S$$

$$f^*(s,x)\leqslant a'(x)-a(x).$$

代入上式，乃有

$$a(x)\leqslant f(x,N)-f(N,x)\leqslant a'(x)\qquad x\in S$$

这就是(6.1)。

又自

$$f^*(x,w)+f^*(x,t)=f(N,x)-f(x,N)\quad x\in T$$

及 $\quad f^*(x,w)=b(x),\ f^*(x,t)\leqslant b'(x)-b(x)\quad x\in T$

同样推得

$$b(x)\leqslant f(N,x)-f(x,N)\leqslant b'(x)\qquad x\in T$$

这就是(6.3)。

（证毕）

定理6.4 (6.1)—(6.4)能满足的充分和必要条件是：

$$(6.5)\quad C(X,\overline{X})\geqslant b(T\cap\overline{X})-a'(S\cap\overline{X})$$

$$(6.6)\quad C(X,\overline{X})\geqslant a(S\cap X)-b'(T\cap X)$$

对一切$X\subseteq N$均成立。

证 据引理6.1，现在必须证明的是网络$\mathscr{N}_T^*=[N^*,\mathscr{A}^*]$上的极大流是$a(S)+b(T)$。为此须往证$a(S)+b(T)$是新网络的极小截量。设$(X^*,\overline{X}^*)$是新网络的任一截集，分四种情况进行研究：

情况 1 $S\in X^*,t\in\overline{X}^*$，则$X^*=u\cup s\cup X,\overline{X}^*=w\cup t\cup\overline{X}$，

于是 $\quad C(X^*,\overline{X}^*)=C(u\cup s\cup X,w\cup t\cup\overline{X})$

$$=b(T)+a(S\cap\overline{X})+a(S)+a'(S\cap\overline{X})-a(S\cap X)$$
$$+b(T\cap X)+b'(T\cap X)-b(T\cap X)+C(X,\overline{X}),$$

此时恒有

$$C(X^*,\overline{X}^*)\geqslant a(S)+b(T),$$

情况 2 $S\in\overline{X}^*,t\in X^*$，此时$X^*=(u\cup t\cup X)$，

$$\overline{X}^*=w\cup s\cup\overline{X},$$

在$C(X^*,\overline{X}^*)$中包含$C(t,s)=\infty$，故恒有

$$C(X^*,\overline{X}^*)\geqslant a(S)+b(T)。$$

情况 3　$s\in X^*, t\in X^*$，此时 $X^*=u\cup s\cup t\cup X$，

$\overline{X}^*=w\cup X$

$$C(X^*,\overline{X}^*)=C(u\cup s\cup t\cup X, w\cup\overline{X})$$

$$=a(S)+a'(S\cap\overline{X})-a(S\cap\overline{X})+a(S\cap\overline{X})$$

$$+b(T\cap X)+C(X,\overline{X})$$

$C(^*X,\overline{X}^*)\geqslant a(S)+b(T)$ 当且仅当

（由于 $N=X\cap\overline{X}$）

$C(X,\overline{X})\geqslant b(T\cap\overline{X})-a'(S\cap\overline{X})$。

情况 4　$s\in\overline{X}^*, t\in\overline{X}^*$。

此时 $X^*=u\cup X$，$\overline{X}^*=w\cup s\cup t\cup\overline{X}$

$$C(X^*,\overline{X}^*)=C(u\cup X, w\cup s\cup t\cup\overline{X})$$

$$=b(T)+a(S\cap\overline{X})+b'(T\cap X)$$

$$-b(T\cap X)+b(T\cap X)+C(X,\overline{X})$$

$C(X^*,\overline{X}^*)\geqslant a(S)+b(T)$ 当且仅当

$C(X,\overline{X})\geqslant a(S\cap X)-b'(T\cap X)$。

（证毕）

实际上，截取条件（6.1）的后半，条件（6.3）的前半，则对称的供求问题，化成上节的供求问题。

$$f(x,N)-f(N,x)\leqslant a'(x) \qquad x\in S$$

$$f(x,N)-f(N,x)=0 \qquad x\in R$$

$$f(N,x)-f(x,N)\geqslant b(x) \qquad x\in T$$

$$0\leqslant f(x,y)\leqslant C(x,y) \qquad (x,y)\in\mathscr{N}_T$$

再将原网络所给的方向倒转，将 T 看成发点，S 看成收点，b' 看成供应量，a 看成需求量，对称供求问题另一半，也化成上节的供求问题：

$$a(x)\leqslant f(x,N)-f(N,x) \qquad x\in S$$

$$f(x,N)-f(N,x)=0 \qquad x\in R$$

$$f(N,x)-f(x,N)\leqslant b'(x) \qquad x\in T$$

$$0 \leqslant f(x,y) \leqslant c(x,y) \qquad (x,y) \in \mathscr{N}_T$$

自然也就可以利用定理6.3推得定理 6.4，即推得定理 6.4的那两个条件（6.5）与（6.6）。

§7　环流问题

以上几节研究的网络，具几个特点。第一，网络上都是有发点和收点的。第二，每条弧(x,y)的容量是$c(x,y) \geqslant 0$，即通过网络的流f，其在弧(x,y)上的流量，必须满足$0 \leqslant f(x,y) \leqslant c(x,y)$，亦即运输是不能超过交通线的负荷量。第三，在发点与收点上给予一定的要求。因此，在这样的网络上，可行流总是存在的（譬如取$f=\phi$）。但在发点与收点的条件，则不一定能够达到。因此，要找出充分和必要条件，使要求能达到。实际上是将交通网的负荷能力给予一定的改善。本节将往研究一种网络$\mathscr{N}_T=[N,\mathscr{A}]$，在其上无所谓发点与收点。每一点都是中转点，而每个弧上的容量则给定两个非负整数l与c，其中

$$0 \leqslant l \leqslant c$$

要求其上的流f，满足条件

$$(7.1) \quad f(x,N)-f(N,x)=0 \qquad x \in N$$

$$(7.2) \quad l(x,y) \leqslant f(x,y) \leqslant c(x,y) \qquad (x,y) \in \mathscr{A}$$

这就是所谓环流问题。

在环流网络上，出现的新问题是可行流是否存在。例如图 6.10所示之网络：

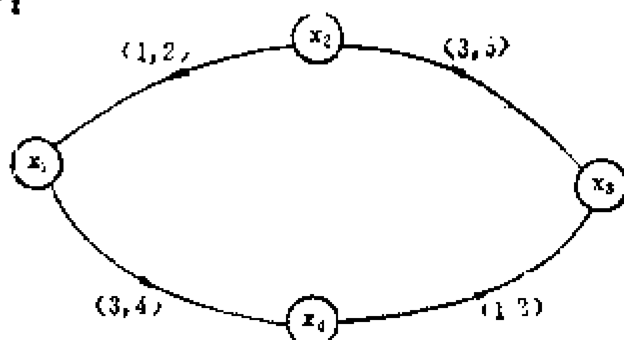


图 6.10

点x 送到x_4的流量至少是3，而从x_4能送出的流量，最多是2，显见这个环流网络是不可行的，即上面的条件(7.1)与(7.2)是不能同时成立的。因此要求环行网络$\mathcal{N}_T$上有可行流（即有流f使(7.1)与(7.2)同时成立），某些条件，必须满足。为此，先作新网络

$$\mathcal{N}^* = [N^*, \mathscr{A}^*]$$

如次：向原网络加进新发点s与新收点t，自s到N的每一点联弧(s,x)，自N的每一点到t联弧(x,t)并在新网络的每条弧上给定容量如下：

$$c^*(x,y) = c(x,y) - l(x,y) \qquad (x,y)\in\mathcal{N}_T$$

$$c^*(s,x) = l[N,x] \qquad x\in N$$

$$c^*(x,t) = l[x,N] \qquad x\in N$$

新网络$\mathcal{N}^*_T = [N^*, \mathscr{A}^*]$显是一个一般的网络，一个发点，一个收点，且其上每条弧的容量是c^*，而l^*全为O。

引理6.2 环流网络$\mathcal{N}_T = [N, \mathscr{A}]$是可行的，其充分和必要条件是上述新网络$\mathcal{N}^*_T = [N^*, \mathscr{A}^*]$有极大流$f^*$，其值为

$$v(f^*) = l[N,N]\ 。$$

证 必要性 设f是环流网络$\mathcal{N}_T = [N, \mathscr{A}]$的可行流，定义$f^*$为

$$f^*(x,y) = f(x,y) - l(x,y) \qquad (x,y)\in\mathcal{N}_T$$

$$f^*(s,x) = l[N,x] \qquad x\in N$$

$$f^*(x,t) = l[x,N] \qquad x\in N$$

首先，可知 $f^*(x,y)\leqslant c^*(x,y) \qquad (x,y)\in\mathcal{N}^*_T$

其次 $f^*(x,N^*) - f(N^*,x) = O \qquad x\in N$

第三 $f^*(s,N^*) = f^*(s,N) = l[N,N]$

$f^*(N^*,t) = f^*(N,t) = l[N,N]$

且因$[s, N^*-s]$与$[N^*-t, t]$都是网络$\mathcal{N}^* = (N^*, \mathscr{A}^*)$上的截集，其截量为$l[N,N]$，故$f^*$是新网络$\mathcal{N}^*_T = (N^*, \mathscr{A}^*]$上的极大流。

充分性　反之设f^*是新网络$\mathscr{N}^*=(N^*,\mathscr{A}^*)$上的极大流，其值是$l(N,N)$。则$f^*$将饱和所有的发出弧与所有的收入弧。取

$$f(x,y)=f^*(x,y)+l(x,y) \qquad (x,y)\in\mathscr{N}_T$$

应有　$$l(x,y)\leqslant f(x,y)\leqslant c(x,y) \qquad (x,y)\in\mathscr{N}_T$$

又在每一点$x\in N$，有

$$f(x,N)=f^*(x,N^*)-f^*(x,t)+l(x,N)$$
$$=f^*(x,N^*) \qquad x\in N$$
$$f(N,x)=f^*(N^*,x)-f^*(s,x)+l(N,x)$$
$$=f^*(N^*,x) \qquad x\in N$$

故　$$f(x,N)-f(N,x)=0。\qquad x\in N$$

即f是环流网络$\mathscr{N}_T=(N,\mathscr{A})$上的可行流。

（证毕）

根据上述引理的论证。问题乃转为上面定义的新网络$\mathscr{N}^*_T=[N^*,\mathscr{A}^*]$，在什么样的情况下存在极大流$f^*$，取值$v(f^*)=l[N,N]$。

在新网络$\mathscr{N}^*_T=[N^*,\mathscr{A}^*]$中，任取截集$(X^*,\overline{X}^*)$，$X^*=s\cup X$，$\overline{X}^*=t\cup\overline{X}$，则

$$C^*(X^*,\overline{X}^*)$$
$$=C^*(s,t)+C^*(s^*,\overline{X})+C^*(X,t)+C^*(X,\overline{X})$$
$$=C(X,\overline{X})-l(X,\overline{X})+l(N,\overline{X})+l(X,N)$$
$$=C(X,\overline{X})-l(\overline{X},X)+l(N,N) \quad (\text{因}N=X\cup\overline{X})$$

故f^*是极大流，取值$l[N,N]$，其充分和必要条件是$C^*(X^*,\overline{X}^*)\geqslant l(N,N)$，而这个条件能成立的充分和必要条件则是

$$C(X,\overline{X})\geqslant l(\overline{X},X),$$

于是得下

定理6.5　环流$\mathscr{N}_T=(N,\mathscr{A})$是可行的，(即（7.1）与（7.2)能同时成立）其充分和必要条件是

$$(7.3) \qquad C(X,\overline{X})\geqslant l(\overline{X},X)$$

对一切$X\subseteq N$均成立。

证 见上。

在定理6.3、6.4、6.5中，都牵涉到在顶集N中任取子集$X\subseteq N$，使其满足一定的条件。验证这些定理的成立，须遍取可能的X。虽然由于图的有限性，验证是可能的。但验证的过程，比较繁杂，工作量是很大的。因此，在此处再提出本章一开始所使用的标号方法来进行检验，有可能工作量要少些。

举定理6.5的环流网络为例。并设l，c均为整数。任取整函数f，满足每个顶上的平衡方程（即整函数f满足(7.1)）。设f再能满足(7.2)，则可行流便已求得。否则条件(7.2)必在某些弧上被破坏，或者出现$f(x,y)>c(x,y)$，或者出现$f(x,y)<l(x,y)$。

情况1　$f(s,t)>c(s,t)$。自顶s起开始标号，将s标号为s：$(t^-,\varepsilon(s)=f(s,t)-c(s,t))$，再自$s$向前标号。

(a)设在标号过程中有弧(x,y)在其上$f(x,y)<c(x,y)$，而x已标号，便将y标号为$(x^+,\varepsilon(y))$，其中

$$\varepsilon(y)=\min(\varepsilon(x),\ c(x,y)-f(x,y))。$$

(b)设在标号过程中，有弧(y,x)，$f(y,x)>l(y,x)$，而x已标号，便将y标号为$(x^-,\ \varepsilon(y))$，其中

$$\varepsilon(y)=\min(\varepsilon(x),f(y,x)-l(y,x))。$$

继续如此进行标号。则或者t已被标号，或者上述的标号方法不能继续进行，而t未能标号，标号中断。

在前一种情况，自s到t找到一条链，链中各点均已标号，在此链上自t向后标号中有“+”号的，将其流量加上$\varepsilon(t)$，标号中出现“-”的，将相应的流量减去$\varepsilon(t)$，而在弧(s,t)上自原给的$f(s,t)$减去ε，其他各弧上的流量都维持不动。

自弧(s,t)与顶s起进行标号迭代时，如所有情形都是中断的，标号停止。环流网络无可行流。

情况2　$f(s,t)<l(s,t)$。此时自t开始标号，尽量设法

标号到s。首先将t标号为$(s^+,\varepsilon(t))$，其中

$$\varepsilon(t)=l(s,t)-f(s,t),$$

自t向前标号，其标号规则与情况1同。或者s已得标号，或者s未得标号，而标号中断，不能前进。在前一情况，自t到s找到了一条链，在这条链上，标号中有"+"的加上$\varepsilon(s)$，有"-"的减去$\varepsilon(s)$，并将$f(s,t)$加上$\varepsilon(s)$，其他各弧上的流量都保持不动。

设自t起进行标号，所有的情况都是中断的，则环流网络没有可行流。

在两种情况中，若标号迭代都是可以进行到底的，且若最后还有(7.2)被破坏的情况，继续按上法进行。最后总可决定环流或者是可行的，或者是不可行的。这可论证如次：在上面标号迭代的行进中，设出现标号中止的情况。举情况1为例，必有某些顶x已被标号，其中包括s，还有许多顶$\bar{x}$未被标号，其中包含t，于是得截集$[X,\bar{X}]$。据标号方法，知在$[X,\bar{X}]$的任一弧$(x,\bar{x})$上，必有$f(x,\bar{x})\geqslant c(x,\bar{x})$，而在弧$(\bar{x},x)$上有$f(\bar{x},x)\leqslant l(\bar{x},x)$，但至少存在弧$(s,t)$，在其上$f(s,t)>c(s,t)$，原设流$f$是满足所有平衡方程的(即满足条件(7.1))，故有

$$O=f(X,\bar{X})-f(\bar{X},X)>C(X,\bar{X})-l(\bar{X},X),$$

或

$$C(X,\bar{X})-l(\bar{X},X)<O,$$

这和条件(7.3)矛盾。因而知标号中断情况，确表示环流网络是不可行的。

同理可证情况2的中断情况，也表示环流网络是不可行的。

现在再回过来研究本章一开始所提出的那个问题：

已给网络$\mathscr{N}_T'=(N',\mathscr{A}')$，$s$是其发点，$t$是其收点。要求在其上寻求极大流，除满足条件(1.1)，(1.2)，(1.3)外再满足条件

$(1.4')\ l(x,y)\leqslant f(x,y)\leqslant c(x,y),\quad (x,y)\in\mathscr{N}_T$

其中 $\quad -\infty<l\leqslant c<+\infty$。

增加弧(t,s)，于其上给定 $l(t,s)=0$，$c(t,s)=\infty$，则原给网络$\mathscr{N}_T'=(N',\mathscr{A}')$变成一个环流网络$\mathscr{N}_T^*=(N^*,\mathscr{A}^*)$。据定理6.5，便有下

推理6.5a 网络$\mathscr{N}_T'=[N',\mathscr{A}']$，在其弧上给定函数$l$与$c$：$0\leqslant l\leqslant c\leqslant+\infty$，这个网络$\mathscr{N}_T'$有流$f$满足条件

(1.1) $\quad f(s,N)-f(N,s)=v$

(1.2) $\quad f(x,N)-f(N,x)=0\quad x\in N-\{s,t\}$

(1.3) $\quad f(N,t)-f(t,N)=v$

(1.4) $\quad l(x,y)\leqslant f(x,y)\leqslant c(x,y)$

$$(x,y)\in\mathscr{N}_T'$$

其充分和必要条件是

$$C(X,\overline{X})\geqslant l(\overline{X},X)$$

对一切$X\subset N$均成立。

网络$\mathscr{N}_T'=(N',\mathscr{A}')$若是可行的，即若有许可流$f$，$v(f)$便是环流网络$\mathscr{N}_T^*=[N^*,\mathscr{A}^*]$弧$(t,s)$上的流量$f(t,s)$。据网络$\mathscr{N}_T^*$的约束条件，有$0\leqslant f(t,s)=v\leqslant\infty$。

同样，可自许可流f起进行Ford与Fulkersen的标号迭代，不断加大$v(f)$，最后得

$$\max v(f)=\min_{\substack{X\ni s\\ \overline{X}\ni t}}(C(X,\overline{X})-l(\overline{X},X))$$

其中$(X,\overline{X})$是网络$\mathscr{N}_T'=(N',\mathscr{A}')$的一个截集，$s\in X$，$t\in\overline{X}$，$C(X,\overline{X})-l(\overline{X},X)$是相应的截量。极大流量—极小截量定理同样成立。

在这里l与c所在的范围还可以推广为

$$-\infty\leqslant l\leqslant c\leqslant+\infty$$

以上这些结果，同样成立。

§8 环流与势差

本节使用的数域可以是实数域。为了保持整数性，取数域为整数环。

设在上节环流网络里，将第二组约束条件去掉，问题变为在有向图$G=(X, U)$的弧组上，定义整函数$f(x, y)$，使其满足条件：

$$(8.1)\quad f(X, x)-f(x, X)=0 \quad x\in X$$

流f称为环流f，在每个顶满足平衡条件。设G共含m条弧，将每条弧编号，环流便成一个m维向量，称为**环流向量**，记为$\varphi=(\varphi_1, \cdots, \varphi_m)$。易见所有这样的环流向量，构成一个$m$维向量子空间，称为**环流空间**。又易见每个初级圈μ是一个环流向量（在μ上定一个总方向，然后按各弧的方向取$f_i=+1$或-1，其他皆取为0。），仍记为μ。将G看成是一个电网络，环流的量便是在这个网络上运行的电流。

若在弧组U上再定义整函数θ，每个整函数θ，同样定义一个m维向量：

$$\theta=(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n),$$

若向量θ满足条件

$$(8.2)\quad \langle\mu, \theta\rangle=\sum_{i=1}^{m}\mu_i\theta_i=0$$

对一切圈μ均成立，则θ称为**势差**。其元素构成m维向量，称为**势差向量**。同样，所有这样的势差向量构成一个m维向量子空间，称为**势差空间**。又易见每个初级余圈是一个势差向量，即余圈$[A, \bar{A}]$里，在$(A, \bar{A})$弧上，取$\theta_i=+1$在$(\bar{A}, A)$弧上取$\theta_i=-1$其他皆取为0，这样的势差向量显能满足条件(8.2)，（见第三章）。

设图$G=(X, U)$的一个跨顶树是T，与T相应的，有

$m-n+p$个独立的初级圈和$n-p$个独立的初级余圈。环流空间取这些初级圈为底，势差空间取这些初级余圈为底。这两个向量空间的维分别为$m-n+p$与$n-p$，且相互正交。所有这些在第三章已加论述，这里就不再重复了（可参看C. Berge：Graph and Hypergraph第五章。）。

环流向量，若再满足上节所讲的环流网络上的第二组条件，又在图里，取一特定弧，定为第一弧u_1。如上节论述的那样，第一、须解决环流存在的问题，第二、如环流存在，可以寻求弧u_1上的极大值。

对于势差，有同样的问题。即在每个弧u_i上给定二数l_i与c_i，$(-\infty \leqslant l_i \leqslant c_i \leqslant +\infty)$，要求确定势差向量$\theta=(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m)$，除能满足条件（8.2）之外，再满足条件

$$(8.3)\quad -\infty \leqslant l_i \leqslant \theta_i \leqslant c_i \leqslant +\infty。$$

因此，关于势差，就也必须解决两个问题，第一是存在问题，第二是图里某个特定弧u_1上的极大势差量问题。

定理6.6 向量$\theta=(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m)$是一个势差，其充分和必要条件是：

在顶集X，存在函数$t(x)$，使在每个弧$u=(a, b)$上有$\theta=t(b)-t(a)$。

证 充分性　设$\theta=(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m)$是由$t(x)$所确定的向量。若$\mu=(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m)$是任一圈，其中$i$表示第$i$个弧，$\mu_i=\pm 1$，给$\mu$以总方向之后，设其顶点依次为$a$，$b$，…，$z$，则

$$\mu_{i1}\theta_{i1}=t(b)-t(a)$$

$$\mu_{i2}\theta_{i2}=t(c)-t(b)$$

$$\vdots$$

$$\mu_{ik}\theta_{ik}=t(a)-t(z)$$

两边相加便有

$$\langle\mu,\ \theta\rangle=0,$$

这就证明了$\theta=(\theta_1,\ \theta_2,\ \cdots,\ \theta_m)$是一个势差向量。

必要性　设$\theta=(\theta_1,\ \theta_2,\ \cdots,\ \theta_m)$是一个势差向量。可按下面的办法，将$G$的顶标号，并给以相应的函数值。

（1）　任取一顶作为x_0,将其标号，并取$t(x_0)=0$，

（2）　设顶x已标号，有弧$i=(x,\ y)$，而y未标号，

取　$t(y)=t(x)+\theta_i$，

并将y标号。

若有弧$i=(y,\ x)$，则取$t(y)=t(x)-\theta_i$并将y标号。按照这个办法，只要图是联接的（否则可分别考虑其联接的分子图），每个顶将得到标号，并得到其函数值$t(x)$。

以下往证$t(x)$的值是唯一确定的。设$t(x)$的确定是自x_0遵循两条不同的链μ^1与μ^2得到的，且其二值

$$\langle\mu^1,\ \theta\rangle\neq\langle\mu^2,\ \theta\rangle,$$

则

$$\langle\mu^1-\mu^2,\ \theta\rangle\neq0.$$

但$\mu^1-\mu^2$是一个圈，这与θ是势差相矛盾。

（证毕）

据这个定理也可以推知，每一余圈是一个势差。因若$[X,\ \bar{X}]$是一余圈取

$$t(x)=\begin{cases}0 & 当x\in X\\ 1 & 当x\in \bar{X}\end{cases}$$

便得势差θ：$\theta(x,\ \bar{x})=1$，$\theta(\bar{x},\ x)=-1$其他的弧上θ取值0。

从这个定理，也可以理解势差的含义。在有向图$G=(X,\ U)$上，设每个顶有一个位势，顺着每条弧便自然产生了位势之差。

以下将往解决关于势差所提出来的那两个问题：

第一，许可势差的存在问题。第二，图G里某一特定弧μ_i上极大势差量问题。

对许可势差的存在问题，我们先给出一个必要条件，即

引理6.3 许可势差存在的必要条件是对每个圈μ有：

$$\sum_{\mu^+} l_i - \sum_{\mu^-} c_j \leqslant 0 \text{。}$$

证 如果势差θ存在，则对一切圈μ均有

$$0 = \langle \mu, \theta \rangle - \langle \mu^+, \theta \rangle \cdot \langle \mu^-, \theta \rangle$$

$$- \sum_{\mu^+} \theta_i - \sum_{\mu^-} \theta_j \geqslant \sum_{\mu^+} l_i - \sum_{\mu^-} c_j \text{。}$$

（证毕）

这个条件也是充分的。为了说明这一点，先论述J. C Herz〔967〕的标号迭代方法。

任给势差

$$\theta = (\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m),$$

这个势差不一定是许可的，即条件（8.3）不一定能满足。$Herz$的迭代方法，给出了如何判断决定，并如何对θ进行调整的方法.

定义

$$d(\theta_i) \quad \begin{cases} 0 & \text{当}l_i \leqslant \theta_i \leqslant c_i \\ l_i - \theta_i & \text{当}\theta_i < l_i \\ \theta_i - c_i & \text{当}\theta_i > c_i \end{cases}$$

$$d(\theta) - \sum_{i=1}^{m} d(\theta_i) \geqslant 0$$

显见势差是许可的，当且仅当

$$d(\theta) \quad 0 \text{。}$$

若$d(\theta) > 0$，则或者出现某些$\theta_i < l_i$，或某些$\theta_i > c_i$。

情况1 设有弧$1 = (t, s)$，在其上$\theta_1 < l_1$。

将其他各弧编号之后进行如下的标号：

第一步：将s标号为$+1$。

第二步：设顶x已标号，弧i （x，y），而y未标号，且$\theta_i \leqslant l_i$，将y标号为$+i$。

设顶x已标号，弧$i=$（y，x），而y未标号，且$\theta_i \geqslant c_i$，将y标号为$-i$。

尽可能将顶点如此标号之后，又将出现两种情况。第一种情况是："弧1的起点t不能标号"则在图G上已标号的顶集可记为A，$A \ni s$，未标号的顶集记为$\overline{A}$，$\overline{A} \ni t$。

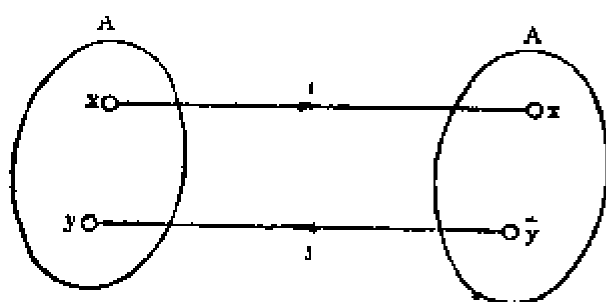


图 6 14

〔A，$\overline{A}$〕成一余圈。取

$$\theta' \quad \theta \cdot (A, \overline{A})。$$

首先，由于（A，$\overline{A}$）是一余圈，θ'将仍是一个势差，其次由于弧i （x，$\overline{x}$），x已标号，$\overline{x}$不能标号，故必有$\theta > l_i$。同理，在弧$j=$（$\overline{y}$，y）上，必有$\theta_j < c_j$，于是

$$d(\theta') \leqslant d(\theta) - 1。$$

假使这个迭代方法，可以继续进行，则最后将导致$d(\theta') = 0$，而θ'是一个许可势差。

假使在上面的迭代过程中，t可以标号，则所有已标号的顶将构成一个链ν - 〔s，x_1，x_2，…，x_k ，t〕，在这个链中，每个顶均由其前面的顶而得到标号。而且，标号为"+"者，指明其前面的弧上有：$\theta_i \leqslant l_i$，这种弧属于ν^+，标号为"　"者，指明其前面的弧上有：$\theta_i \geqslant c$ ，这种弧属于ν^-。而ν（t，s）则构成一个圈μ。由于在（t，s）上有$\theta_1 < l_1$，故得：

$$0 \quad (\mu, \theta, \quad \sum_{\mu^+} \theta_i \quad \sum_{\mu^-} \theta_j < \sum_{\mu^+} l_i \quad \sum_{\mu^-} c_j$$

由前述引理知，此时有向图$G=(X, U)$上不存在许可势差。

情况2　若存在弧(t, s)取为弧"1"，但$\theta_1>c_1$，此时可按上法，同样进行标号迭代。

定理1.7　已给有向图$G=(X, U)$，在其每一弧i上，给定二数l_i与c_i，

$$-\infty\leqslant l_i\leqslant c_i\leqslant+\infty,$$

则存在许可势差$\theta=(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m)$的充分和必要条件是对每一圈$\mu$有

$$(8.4)\qquad \sum_{i\in\mu^-}c_i-\sum_{i\in\mu^+}l_i\geqslant 0\ 。$$

证　必要性已在前述引理中得到证明。

又据Hez的迭代方法，当(8.4)成立，迭代调整，最后总可得势差θ'，使$d(\theta')=0$。

（证毕）

定理1.8　已给有向图$G=(X, U)$，在其每一弧i上给定二数l_i与c_i，

$$-\infty<l_i\leqslant c_i<+\infty$$

且许可势差是存在的。则在某一固定弧"1"上，其极大势差是

$$\max\theta_1=\min_{\substack{\mu\\(1\in\mu^+)}}\left(\sum_{i\in\mu^-}c_i-\sum_{\substack{i\in\mu^+\\i\neq1}}l_i\right)。$$

证(1)设θ是一个许可势差。对一切含弧"1"，且取弧"1"的方向为总方向的圈μ有

$$0=\langle\mu, \theta\rangle=\sum_1\theta_1+\sum_{\substack{i\in\mu^+\\i\neq1}}\theta_i-\sum_{i\in\mu^-}\theta_i$$

$$\geqslant\theta_1+\sum_{\substack{i\in\mu^+\\i\neq1}}l_i-\sum_{i\in\mu^-}c_i$$

故
$$\theta_1 \leqslant \sum_{i\in\mu^-} c_i - \sum_{\substack{i\in\mu^+\\ i\neq 1}} l_i$$

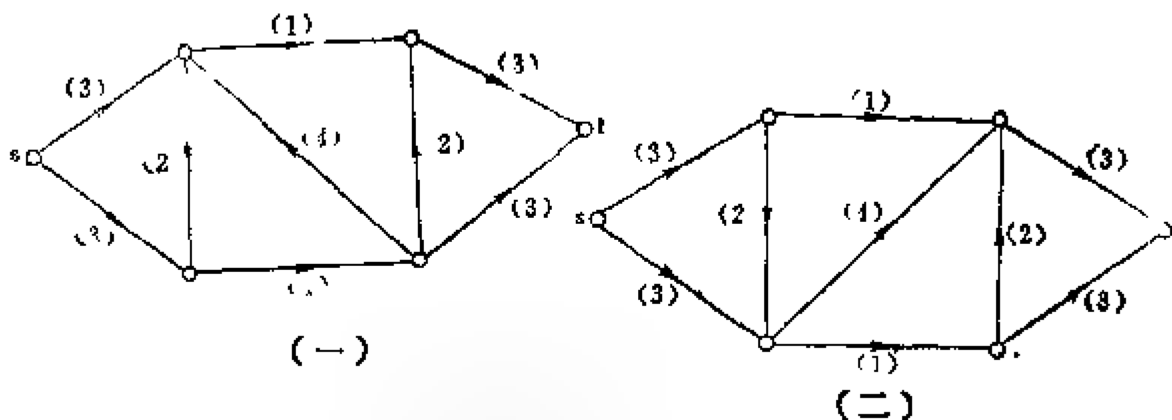
对一切含弧"1"的圈μ均成立。

（2）设弧$1=(t,\ s)$按上标号方法，自顶s起标号的顶集取为A，$s\in A$，未标号的顶集记为$\bar{A}$，$t\in\bar{A}$，在$(A,\ \bar{A})$的弧$(x,\ \bar{x})$上将有$\theta_i>l_i$，而在弧$(\bar{x},\ x)$上将有$\theta_i<c_i$，故$\theta'=\theta-(A,\ \bar{A})$仍是一个许可势差。但在此时，$\theta_1'=\theta_1+1$已加大。就$\theta'$重复标号，不断加大$\theta_1$，并改变某些$\theta_i$的值。$l_i$与$c_i$均是有限的，最后必将出现下列情况，即$t$能标号，得圈
$$\mu=[s,\ x_1,\ x_2\cdots,\ x_k,\ t,\ s]$$
应有
$$0=\langle\mu,\ \theta\rangle=\theta_1+\sum_{\substack{i\in\mu^+\\ i\neq 1}}\theta_i-\sum_{i\in\mu^-}\theta_i$$
$$=\theta_1+\sum_{\substack{i\in\mu^+\\ i\neq 1}}l_i-\sum_{i\in\mu^-}c_i$$
或
$$\theta_1=\sum_{i\in\mu^-}c_i-\sum_{\substack{i\in\mu^+\\ i\neq 1}}l_i$$

比较上不等式，知θ_1已达到极大。

习　题

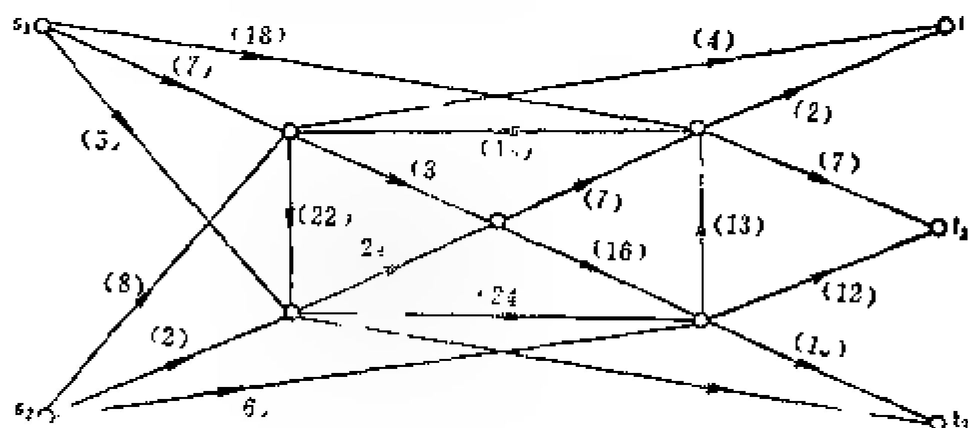
1　对下面的每个网络，分别求出其所有可能的流和最大流。（括号数字表示容量，下同。）



（一）　　　　（二）

2　一个网络有非零可行流的充分必要条件是什么?

3．用标号法求下列网络的最大流.



4　试证明：在任一网络 $\mathcal{N}=(N,\mathscr{A})$ 中，对任一个顶集 $X\subseteq N$，任一个流f恒有，

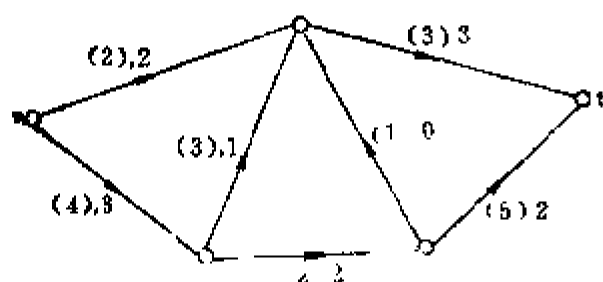
$$\sum_{x\in X}(f(x,N)-f(N,x))=f(X,\bar{X})-f(\bar{X},X).$$

举例说明，一般，$\sum_{x\in X} f(x,N)\neq f(X,\bar{X})$

及　　$\sum_{x\in X} f(N,x)\neq f(\bar{X},X)$.

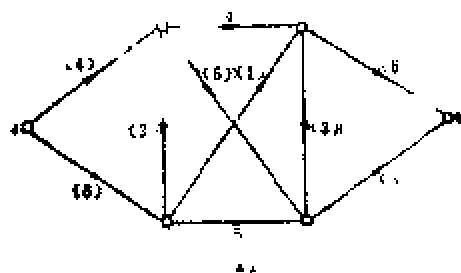
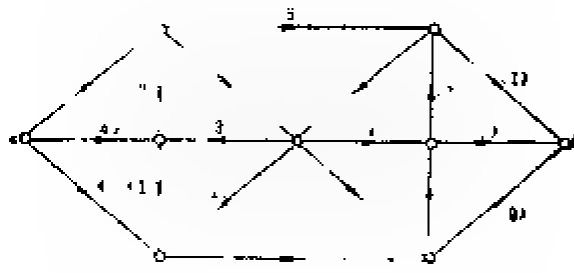
5．在图六的网络中，(1)确定所有的截。(2)求出最小截的截量。(3)证明所给的流为最大流。

6　试证明，如果 $(X,\bar{X})$ 与 $(Y,\bar{Y})$ 都是网络 $\mathcal{N}$ 中的最小截，则 $(X\cup Y,\overline{X\cup Y})$ 与 $(X\cap Y,\overline{X\cap Y})$ 也都是最小截。

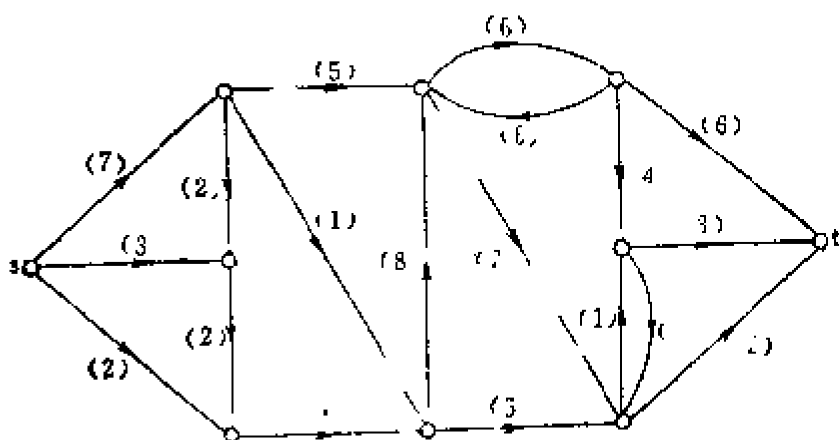


第 5 题图

7．对下列各运输网络分别求出其极大流及极小截。

（一）　　　　　　　　　　（二）



（三）

8．试说明，在一个运输网络中，流f使得每一条由发点s到收点t的有向路中都至少含有一条弧(x, y)使$f(x, y)=c(x, y)$，即弧(x, y)是饱和的，并不能保证f为最大流。

9．设有限集X有一个划分$\mathscr{A}=\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$，又$\mathscr{B}=\{B_1, B_2, \cdots, B_m\}$是$X$的一个子集簇且具有性质：$\mathscr{A}$中任意$k$个集合的并至多含有$\mathscr{B}$中$k$个集合的并集，对$k=1, 2, \cdots, n$均成立。则存在一个下标组$i_1, i_2, \cdots, i_m$使$A_{i_p} \cap B_p \neq \phi$对$p=1, 2, \cdots, m$均成立。

10．考虑网络$\mathscr{N}=(N, \mathscr{A})$，其中每一点$x$均伴随一个非负整数$m(x)$。说明如何修改网络并使用标号法来求出满足：对所有$x \in N-\{s, t\}$都有

$$f(N, x) \leq m(x)$$

成立的最大流f。

11 考虑网络$\mathscr{N}=(N,\mathscr{A})$，其中每一条弧$(x,y)$上都对应一对函数：$b(x,y)$及$c(x,y)$且$0\le b(x,y)\le c(x,y)$。设原有一个流$f$满足对一切弧$(x,y)$：$b(x,y)\le f(x,y)\le c(x,y)$。试修改标号法以求出满足上述约束条件的极大流。又，存在一个流f满足上述约束条件的充分必要条件是什么？

12．设已知一个两分图$G=\langle X,Y;E\rangle$。试利用供求定理导出：（1）在G中存在一个极大并列集使X中每点均与并列集中某条边相关联的条件。

（2）在G中存在一个极大并列集使Y中每点均与并列集中某条边相关联的条件。

13．设有一个运输网络$\mathscr{N}_T=(N,\mathscr{A})$，对它所提出的供求问题是可行的。试描述一个算法以求出满足所有需求的最大流f。

14．极小流问题。设已知一个网络$\mathscr{N}_T=(N,\mathscr{A})$，其上每条弧$(x,y)$对应的函数$c(x,y)$的值为已知。欲求出一个流$f$使之满足条件

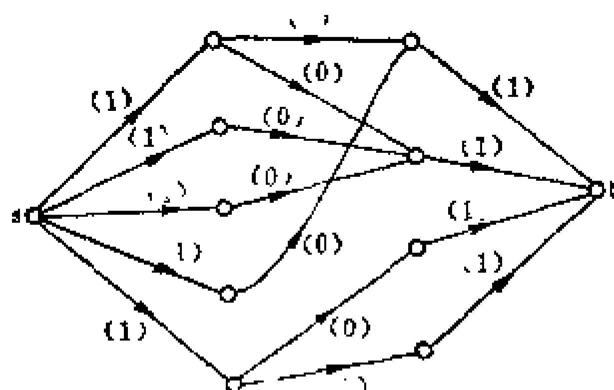
$$\sum_{x\in S}f(x,N)-\sum_{x\in S}f(N,x)=\sum_{x\in T}f(N,x)-\sum_{x\in T}f(x,N)=v$$

$$f(x,N)-f(N,x)=0\qquad x\in R,$$

$$f(x,y)\ge c(x,y)\qquad \text{对所有弧}(x,y)\in\mathscr{A}$$

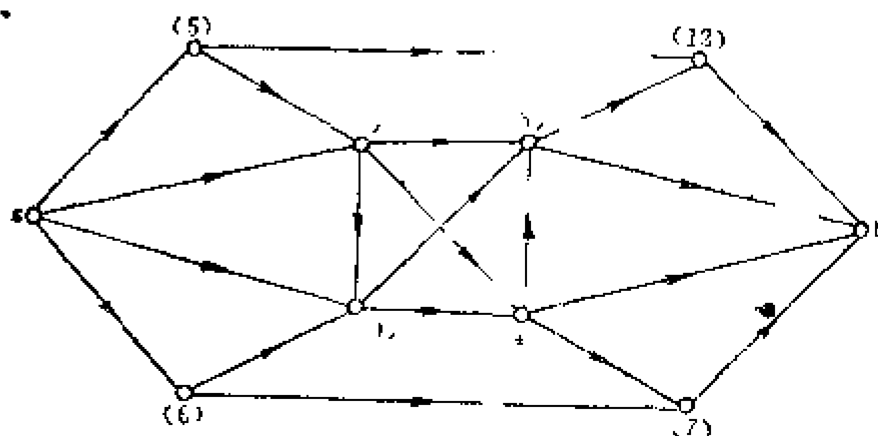
且使v达到极小。试描述一个算法。

15 对下图示之网络求出一个如上一题所述之极小流。进一步回答下述问题，如已知一个无弧立点的二分图$G=(X,Y,E)$，求出边集E的一个子集E_1使G中任一点均至少与E_1中一条边相关联，E_1中至少应有多少边？

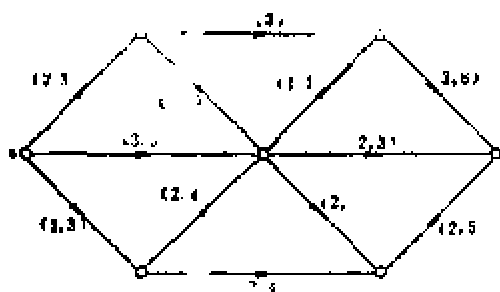


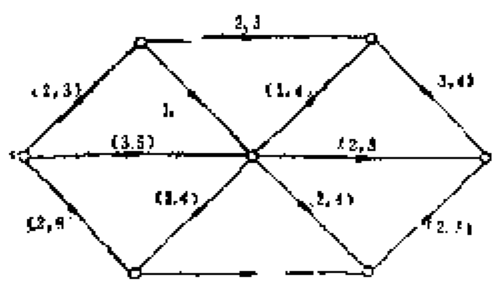
16 对下图示之网络求出一个最大流f使之满足条件 对一切$x\in N-\{s,t\}$均有$f(N,x)\le m(x)$，$m(x)$的值已标在各个顶点上。假定每条弧的容量

都是无穷。



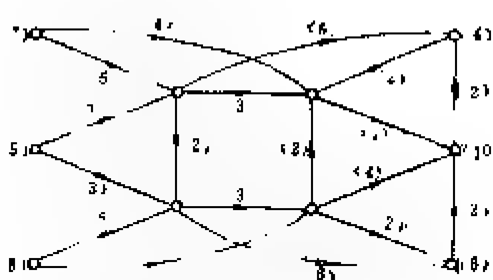
17 下图示之网络中弧上的数字为$(b(x, y), c(x, y))$，是否存在满足条件$b(x, y) \leq f(x, y) \leq c(x, y)$的流$f$？如不存在，则说明其理由；如果存在，则求出满足此约束条件的极大流。

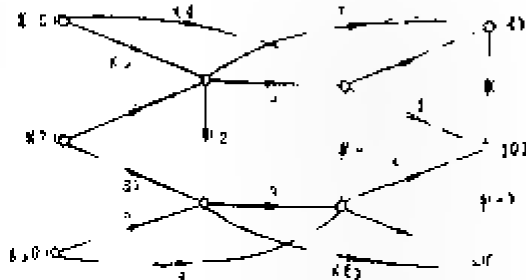




（一）　　　　（二）

18 试对下图示之网络求出供求问题的一个极大流的解。（应用由13题所得之算法）

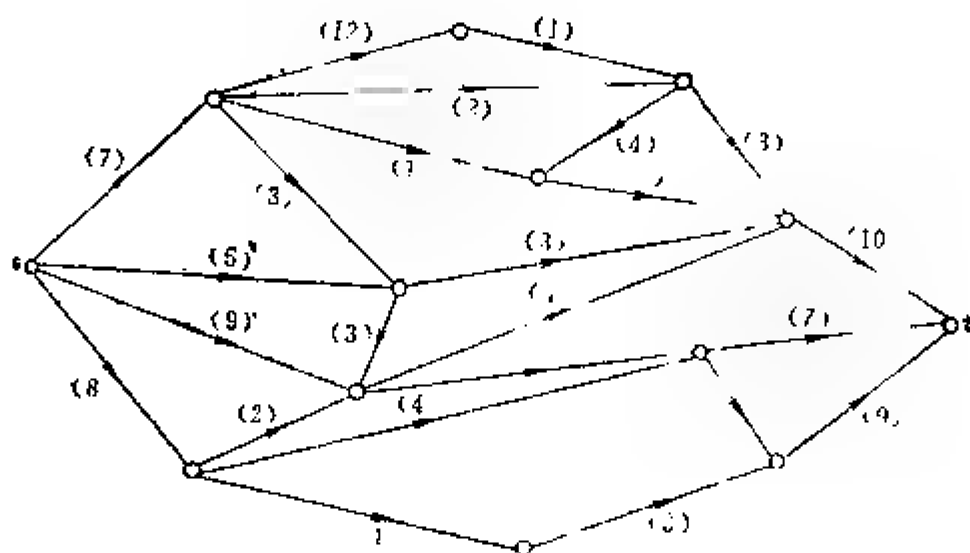




S　（一）　T　　S　（二）　T

19 设已知运输网络$\mathcal{N}=(N, \mathcal{A})$是平面的，即其有向图可以画在平面上使其任二弧不相交叉。利用平面性，试描述一个在平面网络上求最大流的算法，并证明其正确性。

20 利用上题所得之算法在下图示之平面网络上求出一个最大流。



21 设已知一个网络 $\mathscr{N}=(N, \mathscr{A})$，要在 $\mathscr{N}$ 上求出一个流 f 使满足条件:

$$a(x)\leq f(x, N)-f(N, x)\leq a'(x) \qquad x\in S$$

$$f(x, N)-f(N, x)=0 \qquad x\in R$$

$$b(y)\leq f(N, y)-f(y, N)\leq b'(y) \qquad y\in T$$

$$0\leq f(x, y)\leq c(x, y) \qquad (x, y)\in \mathscr{A}$$

为解决可行流 f 的存在性，我们在 $\mathscr{N}$ 上依下述方式构造一个新网络 $\mathscr{N}^*=(N^*, \mathscr{A}^*)$: $N^*=N\cup\{u, w, s, t\}$，在 $\mathscr{A}$ 之外再补充有向弧如下：自 u 向 S 中各点联弧 (u, x)，自 S 中各点向 s 联弧 (x, s)，自 T 中各点向 w 连弧 (y, w)，自 t 向 T 中各点联弧 (t, y)，再连弧 (t, s)，(s, w)，(u, t)，除原有弧的容量不变之外，新增各弧的容量如

$$c(u, x)=a'(x), x\in S; \ c(x, s)=a'(x)-a(x), x\in S,$$

$$c(y, w)=b'(y), y\in T, \ c(t, y)=b'(y)-b(y), y\in T;$$

$$c(u, t)=b'(T), \ c(s, w)=a'(S), \ c(t, s)=\infty$$

在 $\mathscr{N}^*$ 中以 u 为发点，以 w 为收点，试证明 $\mathscr{N}$ 中存在可行流 f 当且仅当 $\mathscr{N}^*$ 中有值为 $a'(S)+b'(T)$ 的极大流存在。

22、利用上题结论证明定理6 4。

23 设已知一个环流网络 $\mathscr{N}=(N, \mathscr{A})$ 其每条弧上均已给出两个非负整数 l, c, 其中 $0\leq l\leq c$。在此网络中任取一条弧 (t, s)，移去 (t, s) 弧后得一新网络 $\mathscr{N}^*=(N, \mathscr{A}^*)$，可把它看成是以 s 为发点，以 t 为收点的运输网络，其上的流 f 应满足条件，

对一切 $x\in N-\{s, t\}$ 有 $f(x, N)-f(N, x)=0$，

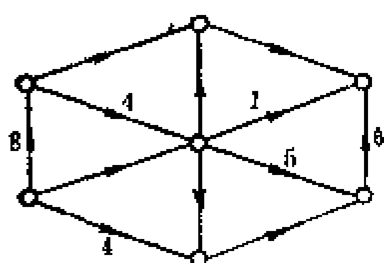
对一切弧 $(x, y)\in \mathscr{A}-(t, s)$：$l(x, y)\leq f(x, y)\leq c(x, y)$，

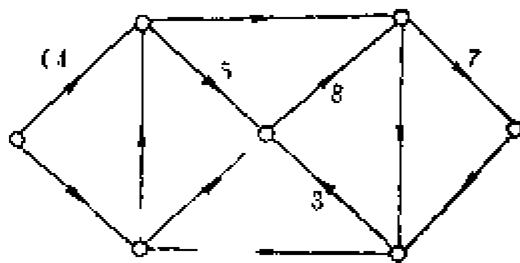
又 $l(t,s)\leq f(s,N)-f(N-t,s)-f(N,t)-f(t\ \ N-s)$

$\leq c(t,s)$,

试用证明定理6 1的方法由此导出原环流网络为可行的必要条件是：对一切$X\subset V$有$c(X,\bar{X})\geq l(\bar{X},X)$。

24. 在下列图中，其一部分弧上给出了函数$f(x,y)$的值。试将它们扩充为该网络上的环流。

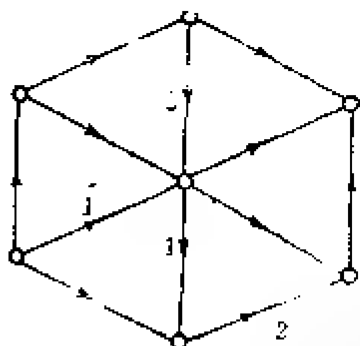


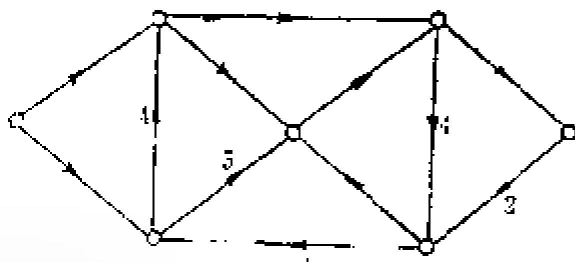


（一）　　　　（二）

25 设$G=(X,U)$为联结的有向图，$T=(X,V)$为其跨顶树。将$U-V$中的弧分别记为1，2，…，k且在其上对应地给出整函数f的值为f_1，f_2，…，f_k，与这些弧相应的初级圈分别记为μ_1，μ_2，…，μ_k，试证明：由f_1，f_2，…，f_k唯一地决定出环流f，且$f=f_1\mu_1+f_2\mu_2+\cdots+f_k\mu_k$

26 在下列图中的一部分弧上标出了函数$\theta(x,y)$的值，试将它们扩充为该网络上的势差，而且求出各顶点的一个势。





27 设$G=(X,U)$是联结的有向图，$T=(X,V)$为其跨顶树。将V中的弧编号为1，2，…，l，相应的初级余圈记为ω_1，ω_2，…，ω_l。在V中的弧上设已给出函数$\theta(x,y)$的值为θ_1，θ_2，…，θ_l。试证明由θ_1，θ_2，…，θ_l唯一地决定出势差$\theta(x,y)$，而且

$$\theta=\theta_1\omega_1+\theta_2\omega_2+\cdots+\theta_l\omega_l$$

28 设联结有向图$G=(X,U)$含m条边，所决定的环流空间记为Φ，势差空间记为Θ。试证明一个m维向量$\phi=(\phi_1,\cdots,\phi_m)\in\Phi$，当且仅当$\phi$与$\Theta$中每一个向量正交。一个$m$维向量$\theta=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)\in\Theta$，当且仅当$\theta$与$\Phi$中每一个向量正交。

第七章　网络流理论在图论上的应用

（具已知半次的图的存在性）

§1　蒙格尔定理

网络流理论，特别是其核心定理极大流量—极小截量定理，在组合数学里（当然也包含图论）有极其丰富的应用。本章除本节讲蒙格尔定理外，主要讲利用网络流理论，来证明一些特殊图的存在性。其他应用，则在适当的地方，予以阐明。

定理7.1　（**蒙格尔定理**〔1927〕）在有向图$G=(X, U)$上，任二点s与t之间弧互质的通路的极大个数，等于截断s与t的极少弧数。

证　（1）在图G上取s为发点，t为收点，并命其上的弧的容量统统为1，得网络$\mathscr{N}_T=[V; \mathscr{A}]$。设$f^*$是其极大流，据条件（1.1）—（1.4），有

$$f^*(s, N)-f^*(N, s)=\nu^*$$
$$f^*(x, N)-f^*(N, x)=0 \qquad x\neq s,t$$
$$f^*(t, N)-f^*(N, t)=-\nu^*$$
$$f^*(x,y)=1 \qquad (x,y)\in\mathscr{N}_T$$

按整数性定理，极大流f^*的值是非负整数，设为$\nu^*(\nu^*\geqslant 0)$。自t到s作ν^*条独立的弧(t,s)，并命其容量都是1。去掉网络里$f^*(x,y)=0$的那些弧，新得的有向图$G^*=(X,U^*)$。格具性质

$$d^+_{G^*}(x)=d^-_{G^*}(x),$$

其中包括s与t在内。据第三章定理3.1的推理3.1。图G^*是一个尤拉回路。故在G^*里至少存在ν^*个自s到t的有向路，且这些路

是弧互质的。因而在原图G里，也至少存在v^*个自s到t的弧互质的路。

(2)设在图$G=(X,U)$里自s到t的弧互质的路极大个数是m，据上面的论证，可知

极大流量$v^* \leqslant m$。

但图G既有m条弧互质的路，自s通向t，任一流f，饱和网络$\mathscr{N}_T$里这些路上的弧，其他弧，f取流量为0，则f的总流量$v=m$。故当f^*是极大流时，便应有

$v^* \geqslant v=m$。

综合二者，乃有

$v^*=m$。

(3)设在图G上截断所有自s通向t的极少弧数为n。命这些弧所成的集为S，即$|S|=n$。在网络$\mathscr{N}_T$里，去掉这些弧，并命自s起可以有路到达的顶的集合为A，$A \ni s$。无路可以到达的顶的集合为$\bar{A}$，$\bar{A} \ni t$，$(A,\bar{A})$成一截集，其截量是$|s|=n$。设

$K^*=(A^*,\bar{A}^*)$是网络$\mathscr{N}_T$的极小截集，显见极小截量 $|K^*| \leqslant n$。

K^*截断s到t的一切通路，而$|s|$是最小的，故又有

$|K^*| \geqslant n$。

综合二者，乃有

极小截量$|K^*|=n$。

据极大流量—极小截量定理，乃有

$m=n$。

（证毕）

定理7.2 在无向图$G=(X,E)$中任取二顶s与t，自s通向t的边互质的链的极大个数等于截断图G里自s通向t的链的极少边数。

证 将无向图G的边化为方向相反的两条弧，得相应的有

向图$G=(X,U)$，应用定理7.1便可推得本定理。　　（证毕）

蒙格尔定理，还可以用顶来描述，有下

定理7.3　在有向图$G=(X,U)$里，任取二顶s与t，设s到t无弧(s,t)直接相通，则s到t的顶互质（除s，t外）的通路的极大个数等于截断所有自s到t的通路的极少顶数。

证　两条路顶互质，当然也必弧互质。故在此时可简称内互质。自原给的有向图G，作新的有向图$G'=(X',U')$，其作法是

第一，在原图中除s与t外，其他每一顶x都拆分成二点x'与x''，并联弧(x',x'')。

第二，原图G中，任一弧(x,y)，在新图G'中，对应于弧(x'',y')。于是原图G中任一自s到t的通路，唯一对应于新图G'中一条通路。如下图7.1

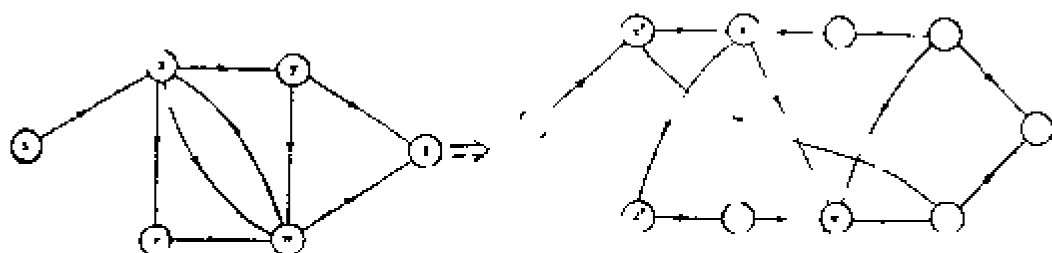


图　7.1

$[s,x,y,t]\Rightarrow[s,x',x'',y',y'',t]$

新图G'中任一自s到t的通路，必经过如(x',x'')等这样的弧。将这样的弧，凝缩成一点，便得原图G自s到t的一条通路。

由于原图G中自s到t无直接通路，故G中任二顶互质的自s到t的通路，在G'中唯一对应于一条弧互质的通路。反之亦然。据定理7.1便可推得本定理。

（证毕）

实际上，自原图G作出相应的图G'。在G'上给定与原来的弧相应的弧(x'',y')等以容量∞，而给新弧(x',x'')等以容量1，在G'使用极大流量—极小截量定理，便也可以推出本定理。这种用法，实际上给我们一种启示，不但一个网

络，其弧可有容量，其顶也可以给以容量，表示顶的转运能力。习惯上、给弧以容量，是假定顶的转运能力是无穷的。按本定理的证明方法，将每顶拆成两顶，联以弧，将该顶的容量，转给该弧，原图上的一切性质，在新图上均成立。但回到原图上来，顶的容量，便起到了它应起的作用。

同样，自定理7.3可以推得下

定理7.4 在无向图$G=(X,E)$里，任取一非邻点s与t，则自s到t的顶互质的链的极大个数，等于截断自s到t的所有的链的极少顶数。

证 （略）。

以上的定理，还可以推广到图G中两组互质的顶集S与顶集T。因为增加新发点s与新收点t，这样的问题，便化成了上面的问题。

§2 具已知半次的p——图的存在性

定理5.3讲到，已给向量$R=(r_1,r_2,\cdots,r_m)$和向量$S=(s_1,s_2,\cdots,s_n)$，在一定条件下存在两分图$G=(X,Y,E)$，使各顶的次数分别是

$$d_G(x_i)=r_i \qquad (i=1,2,\cdots,m)$$

$$d_G(y_j)=s_j \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

本节将把这个问题加以推广，取$m=n$，将问题推广到n阶有向图上来。首先，给出下

引理7.1 (Gale,〔1958〕)在两分运输网络$\mathscr{N}_T=[N,\mathscr{A}]$上有许可流，饱和所有的收入弧，其充分和必要条件是：

$$F(B)\geqslant d(B) \qquad (B\subset Y)$$

其中$F(B)$是网络上可能送到B ($B\subset Y$) 的极大流量，$d(B)$是B到收点t的总容量。

证 设所给网络是可行的。

据极大流量一极小截量定理，自s到t的极大流f^*，其极大

流量

$$V(f^*)\quad \min C(S,\bar{S})\qquad (S\ni s,\ \bar{S}\ni t)$$

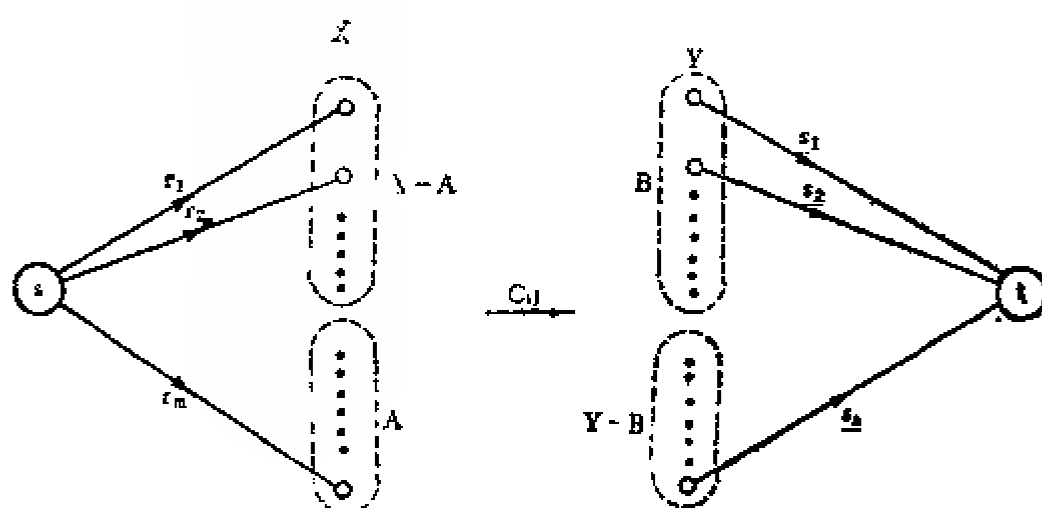


图 7.2

设暂时取定$B\subset Y$，并命

$S=A\cup B\cup t$，其中$A\subset X$如图7.2所示。

则
$$\min_{\substack{A\subset X\\ B\subset Y}} C(S,\bar{S})=\min_{\substack{A\subset X\\ B\subset Y}}[c(s,A)+c(X-A,B)+c(Y-B,t)]$$

$$=\min_{B\subset Y}[\min_{A\subset X}\{c(s,A)+c(X-A,B)\}+c(Y-B,t)]$$

据极大流量—极小截量定理

$$\min_{A\subset X}[c(s,A)+c(X-A,B)]$$

是在暂时取定$B(\subset Y)$之后,所得特殊部份网络的极大流量（见下图7.3）：

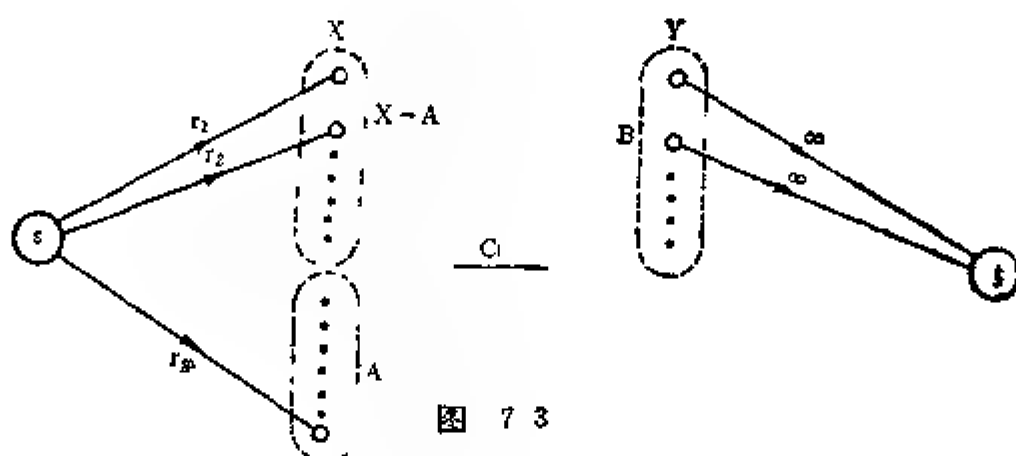


图 7 3

将这个极大流量记为$F(B)$，于是有

$$V(f^*) = \min_{B\subset Y}[F(B) + c(Y\setminus B, t)]$$

$$= c(Y, t) + \min_{B\subset Y}[F(B) - c(B, t)],$$

但(Y, t)是一个截集，故

$$\min_{B\subset Y}[F(B) - c(B, t)] = 0,$$

亦即　　$F(B) \geqslant c(B, t) = d(B)$　　$(B\subset Y)$。

（证毕）

定理7.5　已给n个非负整数对(r_1, s_1)，(r_2, s_2)，…，(r_n, s_n)且

$$s_1 \geqslant s_2 \geqslant \cdots \geqslant s_n,$$

这些数对(r_i, s_i)恰是一个n阶p—图（两顶之间同一个方向至多有p条弧）的出、入半次，(即出次，入次)其充分和必要条件是

（1）$\sum_{i=1}^{n} \min\{pk, r_i\} \geqslant \sum_{j=1}^{k} s_j$，　$(k = 1, 2, \cdots, n-1)$

（2）$\sum_{i=1}^{n} r_i = \sum_{i=1}^{n} s_i$。

证　作两分运输网络$\mathscr{N}_T = [N, \mathscr{A}]$如下。

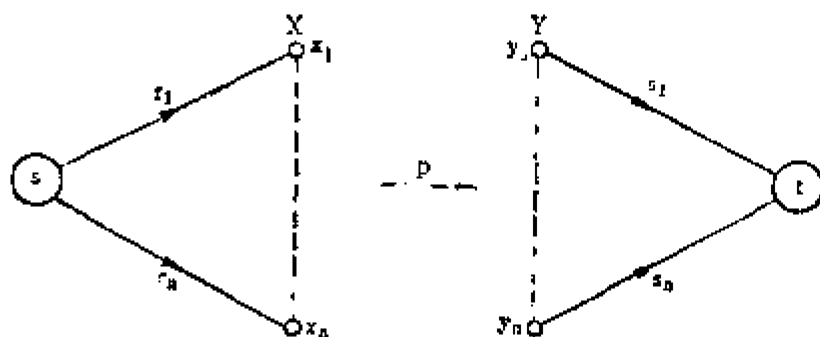


图 7.4

$X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，$Y=\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$各含$n$个点，$s$，$t$分别是发点与收点。$c(s, x_i)=r_i$，$c(y_j, t)=s_j$，$(i, j=1, 2, \cdots, n)$，$c(x_i, y_j)=p$。

必要性　设存在n阶p—图，如定理所云。将图的每个顶x_i，拆成两点x_i，y_i，构造上述两分运输网络。在原图中$d_G^+(x_i, x_j)\leqslant p$.在网络中联弧$(x_i, y_j)$，取其容量为$c(x_i, y_j)=p$。由于原$n$-阶$p$—图，具已给的半次是存在的，故这样的网络是可行的，且这个网络有流f，饱和所有的发出弧与收入弧。首先便应有

$$V(f)=\sum_{i=1}^{n} r_i=\sum_{j=1}^{n} s_j,$$

这便是条件（2）。

在y中任取$B=\{y_{j1}, y_{j2}, \cdots, y_{jk}\}$由于有流饱和所有的收入弧，故据引理，应有

$$F(B)\geqslant c(B, t)。$$

或

$$F(y_{j1}, y_{j2}, \cdots, y_{jk})\geqslant(s_{j1}+s_{j2}+\cdots+s_{jk}),$$在X中，每一点x_i能发出的流量是r_i，x_i到y_{j1}，y_{j2}，$\cdots$，y_{jk}各顶联弧的容量都是p，当$r_i\leqslant pk$时，这个流量，可以全部发到y_{j1}，y_{j2}，$\cdots$，y_{jk}各点，若$r_i>pk$，则最多仅能有流量pk发至各点，各得流量p。故

$$F(B)=\sum_{i=1}^{n}\min(r_i, pk),$$

于是有

$$(1')\quad \sum_{i=1}^{n}\min(r_i, pk)\geqslant s_{j1}+s_{j2}+\cdots+s_{jk};$$

由于s_j是递降的，（1）与（1′）等价，故得（1）。

充分性　设条件成立，在两分网络上，必有流f饱和所有的收入弧。将x_i与y_i合并成一点x_i，乃得一个n-阶的

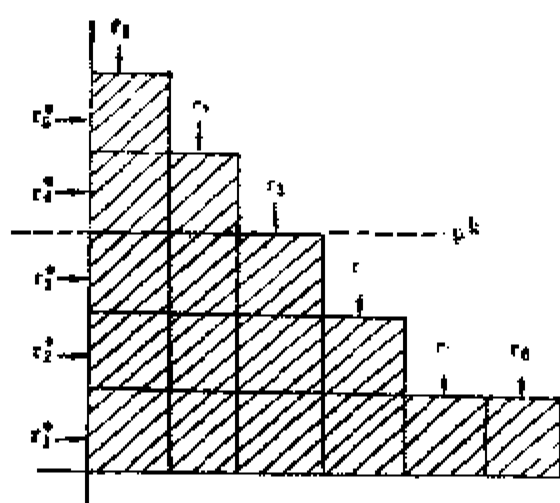


图 7.5

p—图，取r_i与s_i分别为该点x_i的出次与入次。

（证毕）

读者可注意到，有多少个这样的图，这个问题是没有解决的。而且在这样的图上，可能有环。

和定理5.2后面的Ferrers图表一样，同样可以作Ferrers图表，如取$(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6) =$（5，4，3，2，1，1）作出$r_i$如上图7.5画一横线，使其高为$pk$，则

$$\sum_{i=1}^{n} \min(r_i, pk)$$

将是横线pk以下，图中画成阴影的格数。自下向上取第一行里的阴影格数为r_1^*第二行的阴影格数为r_2^*于是

$$\sum_{i=1}^{n} \min(r_i, pk) = \sum_{i=1}^{pk} r_i^*$$

如在上图中，$r_1^* = 6$，$r_2^* = 4$，$r_3^* = 3$，$r_4^* = 2$，$r_5^* = 1$。

实际上，这里并没有必要将r_i排成递降序列。使用这样的符号，定理7.5便可改写成下列形式：

定理7.5′ 已给n个非负整数对(r_1, s_1)，(r_2, s_2)，…，(r_n, s_n)，其中$s_1 \geqslant s_2 \geqslant \cdots \geqslant s_n$，则这些数对恰是一个$n$—阶$p$—图的出入半次，其充分和必要条件是

（1）$\sum_{i=1}^{pk} r_i^* \geqslant \sum_{i=1}^{k} s_i \qquad (k=1, 2, \cdots, n-1)$

（2）$\sum_{i \geqslant 1} r_i^* = \sum_{i=1}^{n} s_i$。

和第五章一样，写出图的相邻矩阵，便得一个非负p一矩阵（元素为不大于p的非负整数的矩阵）．其行和向量与列和向量，便分别是$R=(r_1, r_2, \cdots, r_n)$与$S=(s_1, s_2, \cdots, s_n)$。同样，作出极大矩阵

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \cdots 1, & 0 \cdots, 0 \\ 1 & 1 \cdots 1, & 0 \cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1, \cdots 1, 0 \cdots 0 \end{pmatrix}$$

每列的列和，便是这里的r_1^*，r_2^*，…，定理5′同样成立，条件（1）同样是先前所讲的那个统帅条件。

又在这里取$p=1$，便得一个n阶的(0,1)矩阵，其结果便是定理5.2与定理5.3里取$m=n$的情况。

推理7.5a 已给非负整数列$(r_1, r_2, \cdots, r_n)$，存在1—图，使 $d_G^+(x_i)=r_i$， $d_G^-(x_i)=1$，其充分和必要条件是

$$\sum_{i=1}^{n} r_i = n。$$

证 显然。

若$r_i=1$（$i=1, 2, \cdots, n$），则这样的1—图，便是一个初级圈。取图的每个项，做为其顶点，其相邻矩阵，便是平常所讲的交换矩阵。

§3 具已知半次的对称p——图的存在性

上节研究了具已知出入次的p—图存在性。现在再来研究已给非负整数列$\{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$是否存在以数列$\{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$为出入次的对称$p$—图。为此，先给出

引理7.2 任给对称图$G_0=(X, U)$，在其每一奇圈上总有顶含一个或多个环，又任给非负整数列$\{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$。若$G_0$含有部份图$H$，在各项$x_i$上取$d_H^+(x_i)=d_H^-(x_i)=r_i$，

则G_0必也含有对称的部份图G，在各顶x_i上的出入次也是r_i。即对所有的i：

$$d_G^+(x_i)=d_G^-(x_i)=r_i。$$

证 用归纳法来证明本引理，即若引理对于阶$<n$的图G_0均成立，对于阶$=n$的图G_0本引理也成立。

引理的关键，在自图H，作出对称图G。

1.设在图H里存在一点x_0，其到各项是对称的，

即 $d_H^+(x_0,x_i)=d_H^+(x_i,x_0)$ $(x_i\in X)$

在这种情况，自G_0去掉顶x_0，而得$(n-1)$—阶的图$\overline{G}_0$，自H便得$(n-1)$阶的图$\overline{H}_0$、$\overline{H}$、$\overline{G}_0$的关系和H与G_0的关系是一样的，但阶都是$n-1$，且

$$d_{\overline{H}}^+(x_i)=r_i-d_H^+(x_0,x_i)=\overline{r}_i$$

$$=r_i-d_H^+(x_i,x_0)。$$

按归纳假设，便可自H作得一个$(n-1)$阶的对称图$\overline{G}$，再将顶x_0加到图$\overline{G}$上来，得图G，G便是所要求的那个对称的部份图。

2.设在图H中不存在上述的顶x_0,则至少必存在一顶，设为x_1，与其相邻的顶设为x_2，二顶之间，有关系

$$d_H^+(x_1,x_2)>d_H^+(x_2,x_1),$$

或 $$d_H^+(x_1,x_2)>d_H^-(x_1,x_2)。$$

但据假设

$$d_H^+(x_1)=d_H^-(x_1),$$

故x_1至少必有一个邻点x_3，其

$$d_H^+(x_1,x_3)<d_H^-(x_1,x_3),$$

且此三点是相互不同的。

自x_1出发，命x_2，x_3，…等顶具下述性质

$$d_H^+(x_1,x_2)>d_H^+(x_2,x_1)$$

$$d_H^+(x_2,x_3)>d_H^+(x_3,x_2)$$

$$\vdots$$

由于图是有限的，最后必将得一初级圈。设这个初级圈是

$$\mu = [x_p, x_{p+1}, x_{p+2}, \cdots, x_{p+k} = x_p]。$$

3. 设圈μ是偶的。在下列各点对之间，减去一条弧：

$$(x_p, x_{p+1}), (x_{p+2}, x_{p+3}), \cdots, (x_{p+k-2}, x_{p+k-1}),$$

在下列各点对之间，加上一条弧

$$(x_{p+2}, x_{p+1}), (x_{p+4}, x_{p+3}), \cdots, (x_p, x_{p+k-1})$$

得图H'。在图H'上各顶上的总出入次与原图H各顶上的总出入次一样，但每二顶之间出入次之差将相应减少，即

$$\sum_{\substack{x, y \in X \\ x \neq y}} [d^+_{H'}(x, y) - d^+_{H'}(y, x)]$$

$$< \sum_{\substack{x, y \in X \\ x \neq y}} [d^+_H(x, y) - d^+_H(y, x)]。$$

4. 设圈μ是奇的，图H在顶x_p上有环。仿上，可在下列各点对之间，减去一条弧

$$(x_p, x_p), (x_{p+1}, x_{p+2}), \cdots,$$
$$(x_{p+k-2}, x_{p+k-1})。$$

在下列各点对之间各增加一条弧

$$(x_{p+1}, x_p), (x_{p+3}, x_{p+2}), \cdots, (x_{p+k}, x_{p+k-1}),$$

和上段结果一样，得图H'，其各顶上的总出入次不变，但每两点之间出入次之差，将相应减少。

5. 设圈μ是奇的，但在图H里圈μ的顶上无环。但据引理的假设，原图G_0将有环在μ的某顶上譬如顶x_p，此时，可加进弧

$$(x_p, x_p), (x_{p+2}, x_{p+1}), (x_{p+4}, x_{p+3}), \cdots,$$
$$(x_{p+k-1}, x_{p+k-2}),$$

减去弧

$$(x_p, x_{p+1}), (x_{p+2}, x_{p+3}), \cdots, (x_{p+k-1}, x_{p+k}),$$

将图H变为图H'，图H'有上3与4中所述的性质。

继续如此进行，最后将得一个对称图G_0。（证毕）

定理7.6 已给非负整数列

$$r_1 \geqslant r_2 \geqslant \cdots \geqslant r_n,$$

存在对称p—图G，具性质

$$d_G^+(x_i) = d_G^-(x_i) = r_i$$

对一切i均成立，其充分和必要条件是

$$\sum_{i=1}^{pk} r_i^* \geqslant \sum_{i=1}^{k} r_i \qquad (k=1, 2, \cdots, n-1)。$$

证 作p—图G_0，其二顶x_i，x_j之间均有p条弧，对一切i,j均成立（包括$i=j$在内）。据定理7.5′，存在G_0的部份图H，具性质

$$d_H^+(x_i) = d_H^-(x_i) = r_i$$

其充分和必要条件是

$$\sum_{i=1}^{pk} r_i^* \geqslant \sum_{i=1}^{k} r_i \qquad (k=1, 2, \cdots, n-1)。$$

既存在G_0的部份图H具上性质，故据引理7.2，存在对称的p—图G取r_i为其顶x_i上的外、内半次（对一切x均成立）。

（证毕）

§4 具已知半次的无环p——图的存在性

上两节所讲的p—图，在其某些顶上，可能有环。本节和下节将研究无环的图的存在性。就其相邻矩阵而言，在（非负整）n阶矩阵里，其主对角线上各元素之和，称为矩阵的迹。无环的图，其相邻矩阵，便是一个所谓0—迹矩阵。本节将先往研究具已知半次的无环p—图的存在性，然后再往研究这样的对称图的存在性。

定理7.7 已给n个非负整数对(r_1,s_1)，(r_2, s_2)，…，(r_n, s_n)，存在无环p—图H，取这些数对为其半次，即H

具性质

$$d_H^+(x_i)=r_i,\quad d_H^-(\bar{x}_i)=s_i,\qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

其充分和必要条件是

(1) $\sum_{i=1}^{n}\min\{r_i, p|A-x_i|\}\geqslant s(A)\qquad (A\subset X)$

(2) $\sum_{i=1}^{n}r_i=\sum_{i=1}^{n}s_i$。

证 1.对任一个图G_0作两分网络$\mathscr{N}_T=(X,\bar{X},\mathscr{A})$，如下图7.6所示。

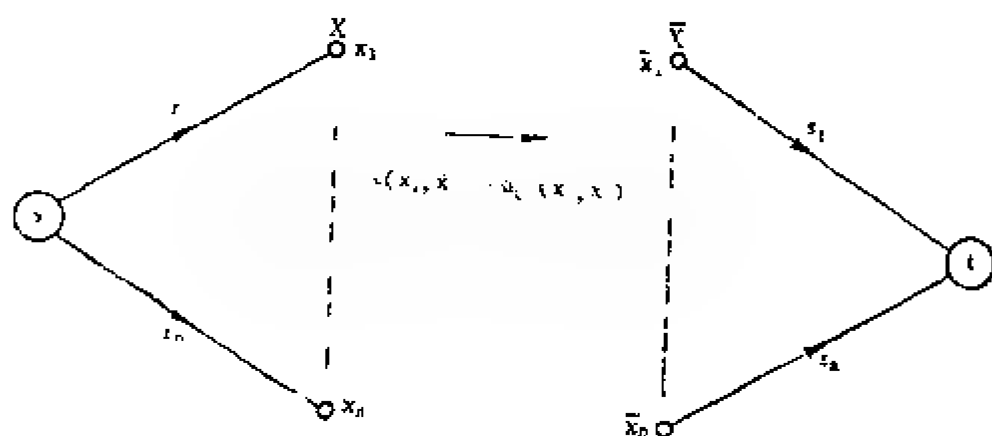


图 7 6

即发出弧的容量是$(r_1, r_2, \cdots, r_n)$，收入弧的容量是$\{s_1,s_2,\cdots,s_n\}$。$(x_i,\bar{x}_j)$各弧的容量是

$$c(x_i,\bar{x}_j)=d_{G_0}^+(x_i, x_j),$$

在图G_0里存在部分图H，具半次

$$d_H^+(x_i)=r_i,\ d_H^-(x_i)=s_i\ (i=1,2,\cdots,n),$$

其充分和必要条件是图7.6的网络中存在流饱和所有的发出弧与收入弧。存在这样的流的充分和必要条件是

$$\sum_{i=1}^{n}r_i\quad \sum_{i=1}^{n}s_i$$

必须满足．据§2的引理7.1，还须下式能成立

$$F(A)\geqslant d(\bar{A}) \qquad (\bar{A}\subset\bar{X})$$

其中A是X中任一子集。$d(\bar{A})$是子集A到收点t的弧的总容量，$F(A)$是网络上发到$\bar{A}$的极大流量。故

$$d(A)=s(A),$$

$$F(A)=\sum_{i=1}^{n}\min\{r_i, c(x_i, \bar{A})\}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\min\{r_i, d_{G_0}^{+}(x_i, \bar{A})\}$$

2．作图G_0，使其是一个无环的全部对称的p－图。所谓无环全部对称p－图，即取

$$d_{G_0}^{+}(x_i, x_j)=p$$

对一切$i\neq j$（$i, j=1, 2, \cdots, n$）均成立，

及 $\qquad d_{G_0}^{+}(x_i, x_i)=0 \quad (i=1, 2, \cdots, n)$，

将这些条件代入 $\quad F(A)\geqslant d(\bar{A})$

乃得条件(1)与(2)。 （证毕）

以下将往研究具已知半次(r_1, r_1)，(r_2, r_2)，…，(r_n, r_n)的无环对称p—图的存在性。首先证下

定理7.8 (Fulkerson, Hoffman, Mc Andrew [1965]) 设$G_0=(X, U)$是一个n阶无环对称图，其任二顶互质奇长的初级圈，总有弧相联。并设$\{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$是一组非负整数其和为一偶数。

设G_0有部份图H，具性质$d_H^{+}(x_i)=d_H^{-}(x_i)=r_i$对一切$i$均成立，则$G_0$必有具此性质的对称部份图$G$，即$G$具性质

$$d_G^{+}(x_i)=d_G^{-}(x_i)=r_i \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

证 在图H的弧(x, y)上，作函数$f_1(x, y)$，

$$f_1(x, y)=d_{H}^{+}(x, y)+d_{H}^{+}(y, x),$$

显见这个函数$f_1(x, y)$满足下列条件

$$(A)\begin{cases} f_1(x, y) = f_1(y, x), \\ 0 \leqslant f_1(x, y) \leqslant 2d^+_{G_0}(x, y) \\ \sum\limits_{y \in X} f_1(x_i, y) = 2r_i \end{cases}$$

1．设$f_1(x, y)$全为偶数，作图G，取

$$d^+_G(x, y) = \frac{1}{2}f_1(x, y),$$

则 $$d^+_G(x,y) = d^+_G(y,x) = \frac{1}{2}f_1(x,y) \leqslant d^+_{G_0}(x,y),$$

且 $$\sum_{y \in X} d^+_G(x_i, y) = \sum_{y \in X} d^+_G(y, x_i)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{y \in X} f(x_i, y) = r_i \ .$$

故G是G_0的对称部份图，无环，如定理要求。

2．设$f_1(x, y)$不全为偶数，作边集E_1：

$E_1 = \{(x,y)/(x,y) \in \mathscr{P}_2(X), f_1(x,y) \equiv 1(2)\}$，

作图$K_1 = (X, E_1)$，这个图是无向的，且其每一顶上的次数，必为偶数，因

$$d_{K_1}(x_k) \equiv \sum_{y \in \Gamma_{K_1}(x_k)} f_1(x_k, y) \equiv \sum_{y \in \Gamma_{G_1}(x_k)} f_1(x_k, y)$$
$$= 2r_k \equiv 0\ (2)$$

又因$f_1(x, y)$不全为偶数，K_1必有边，故K_1必有圈。

3．设K_1有偶圈μ。沿着这个偶圈μ的边，将其相应的$f_1(x,y)$顺次$+1, -1$，在其他各边（包含图H_1的各边）$f_1(x, y)$的值均维持不变，于是得到函数$f_2(x, y)$。由于μ是偶圈，$f_2(x, y)$与$f_1(x, y)$仅在μ上有所不同，故$f_2(x, y)$同样也满足$f_1(x, y)$所满足的条件(A)。又由于$f_2(x,y)$至少在圈μ中所含的边上已全为偶数，故$f_2(x, y)$是奇数的个数比$f_1(x,y)$是奇数的个数少。如果$f_2(x, y)$已全是偶

数，则可如前作出G_0的对称部份图G，否则可作图$K_2=(X, E_2)$，其中

$E_2=\{(x,y)/(x,y)\in\mathscr{P}_2(X), f_2(x,y)\equiv1(2)\}$。同样，$K_2$的每个顶是偶次的。如$K_2$中存在圈$\mu$。设$\mu$是偶长的，仿上，作同样处理，一直继续下去，直至$K_\lambda$，此时所得的相应的$f_\lambda(x, y)$，已全是偶数，便可作出$G_0$的部份对称图$G$。

4．设在迭代过程中出现K_ρ，在K_ρ中无偶圈。但只要K_ρ有边，K_ρ必有圈。此时K_ρ的圈全是奇的，设

$$\mu=[a_1, a_2, \cdots, a_{2k+1}, a_{2k+2}=a_1]$$

是这样一个奇长的圈，则μ必是初级的，否则μ中将含偶长圈，这是矛盾。

在每一个这样的边上，相应的$f_\rho(x, y)$是奇数

于是
$$\sum_{i=1}^{2k+1} f_\rho(a_i, a_{i+1})\equiv1(2),$$

但是
$$\sum_{\substack{i,j\\i<j}} f_\rho(x_i, x_j)=\frac{1}{2}\sum_i\sum_j f_\rho(x_i, x_j)$$

$$=\frac{1}{2}\sum(2r_i)$$

$$=\sum r\equiv0(2)。$$

故K_ρ应再有边不在μ上，于是K_ρ应再有奇长的圈

$$\nu=[b_1, b_2, \cdots, b_{2e+1}, b_{2e+2}=b_1]。$$

设μ与ν有公共顶，则在K_ρ里将出现偶长的圈，这是矛盾。故μ与ν是顶互质的。据假设，在G_0里将有边联此二圈，设为边$[a_1, b_1]$。

若边$[a_1, b_1]\in K_\rho$则在顶a_1与b_1上，出现奇次，K_ρ应再有边不在μ与ν内，于是K_ρ内将出现形为

$$\mu[a_1, b_1]\nu\cdots$$

的圈，其中将含偶圈．这是矛盾。故边 $[a_1, b_1] \in K_\rho$。因而

$$f_\rho(a_1, b_1) \equiv 0 \qquad (2)$$

如果 $f_\rho(a_1, b_1) = 0$，先令 $f_{\rho+1}(a_1, b_1) = 2$，再交错地在边 $[a_1, a_2]$，…，$[a_{2k+1}, a_1]$ 上加上 -1 及 $+1$ 而得到 $f_{\rho+1}(a_i, a_{i+1})$ 的值，在边 $[b_1, b_2]$，…，$[b_{2l+1}, b_1]$ 上也交错地加上 -1 及 $+1$ 得 $f_{\rho+1}(b_i, b_{i+1})$ 的值，对其他边，则令 $f_{\rho+1}(x, y) = f_\rho(x, y)$。如果 $f_\rho(a_1, b_1) \neq 0$，则先令 $f_{\rho+1}(a_1, b_1) = f_\rho(a_1, b_1) - 2$，然后在边 $[a_1, a_2]$，…，$[a_{2k+1}, a_1]$ 上交错地加上 $+1$ 及 -1，在边 $[b_1, b_2]$，…，$[b_{2k+1}, b_1]$ 上也交错地加上 $+1$ 及 -1 而得到对应的 $f_{\rho+1}(a_i, a_{i+1})$ 及 $f_{\rho+1}(b_i, b_{i+1})$ 的值。对其余的边，则令 $f_{\rho+1}(x, y) = f_\rho(x, y)$。

显然，$f_{\rho+1}(x, y)$ 也满足 $f_\rho(x, y)$ 所满足的条件 (A)，而且此时 $f_{\rho+1}(x, y)$ 为奇数的个数或者是零，或者已比 $f_\rho(x, y)$ 为奇数的个数确实减少。继续向下进行，由于原给图 G_0 与 H 都是有限的，必迭代至某个时候，得 G_0 的部份图 K_σ，其 $f_\sigma(x, y)$ 为奇数的个数是零，于是便可作对称图 G，使

$$d_G^+(x, y) = d_G^+(y, x) = \frac{1}{2} f_\sigma(x, y)。$$

又因每次迭代，只是在偶数条边上对 $f(x, y)$ 加 $+1$ 与 -1，对这些有关的顶而言，其次数加1再减1，故各顶上的次数，一直维持不变，故在最后，得对称图 G 时，也有

$$d_G^+(x_i) = d_G^-(x_i) = r_i \qquad \text{对一切}\ i\ \text{均成立。}$$

（证毕）

定理7.9 已给 $p \geqslant 1$，$r_1 \geqslant r_2 \cdots \geqslant r_n \geqslant 1$ 且 $\sum_{i=1}^{n} r_i$ = 偶数，存在无环对称 p—图 G，使

$$d^+(x_i) = d_G^-(x_i) = r_i.$$

对一切i均成立，其充分和必要条件是

$$\sum_{i=1}^{n} \min\{r_i, p \cdot |A - \{x_i\}|\} \geqslant \sum_{x_i \in A} r_i \quad (A \subset X),$$

证 作对称图G_0，使$d_{G_0}^+(x_i, x_j) = p$对一切$i \neq j$均成立（$i, j = 1, 2, \cdots, n$）并使$d_{G_0}^+(x_i, x_i) = 0$对一切i均成立，这样的图G_0能满足定理7.8的一切要求。

又据引理7.1，可推得部份图H的存在。

据定理7.8乃推得本定理。

（证毕）

§5 具已知半次的竞赛图的存在性

设有n个球队作循环赛，每二队都比赛C次。设想已给非负整数$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$，这$n$个数能成为比赛结束后的胜利记录，其充分和必要条件是什么？（Gale, Ford—Fulkerson）

为了解决这个问题，先作有向图$G = (N, U)$，其中

$N = \{1, 2, \cdots, n\}$　　代表n个球队

$U = \{(i, j) \mid i < j\}$，

取C为每条弧上的容量，便得网络$\mathscr{N}_T = (N, \mathscr{A})$。

设$f(i, j)$代表第i队战胜第j队的次数，显有

$0 \leqslant f(i, j) \leqslant C$。

故在弧(i, j)上定义的非负整函数，可视为网络$\mathscr{N}_T$上的一个流。若第i队战胜的总次数为a_i，则

$$\sum_{i<j} f(i, j) + \sum_{i<j} [C - f(j, i)] = a_i,$$

$$f(i, N) - f(N, i) = a_i - C(i-1)。$$

反之，设在图G的弧上，定义的非负整函数f，满足上述条件及

$0 \leqslant f(i, j) \leqslant C$，

则f将代表一个竞赛结果，使第i队的战胜总次数是α_i。

定义

$$S = \{i / \alpha_i - C(i-1) \geq 0\} \qquad (S \subset N)$$
$$T = \overline{S} = N - S,$$

在网络$\mathcal{N}_1$上乃得供求函数为

$$a(i) = \alpha_i - C(i-1),$$
$$b(i) = -\alpha_i + C(i-1)。$$

故α等能成为竞赛结果的胜利记录，其充分和必要条件是下列的约束条件为可行的：

$$\begin{cases} f(i, N) - f(N, i) \geq a(i) & (i \in S) \\ f(N, i) - f(i, N) \leq b(i) & (i \in T) \\ 0 \leq f(i, j) \leq C。 \end{cases}$$

由于$\Sigma\alpha_i = C \cdot n(n-1)/2$，故恒有$a(S) = b(T)$。

上述这些条件，即第六章§5中的条件(5.1)－(5.4)。不过在本问题，其$R = \varnothing$。据定理6.7，这些条件能成立的充分和必要条件是

(5.5) $\qquad b(T \cap \overline{X}) - a(S \cap \overline{X}) \leq C(X, \overline{X})$

对一切$X \subset N$都成立。当$\overline{X} = N$时，由于$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = C \cdot n(n-1)/2$，显见等号是成立的。

上面的条件，因每个数$\{1, 2, \cdots, n\}$可以选取，也可以不选取，故共有2^n个这样的不等式。这些不等式可简化如次。

上式可写成

$$-C|X| + C[\sum_{\overline{X}} 1 - (X, \overline{X})] \leq \sum_{\overline{X}} z_i$$

其中符号“| |”表示“个数”。

在这些式子里，考虑所有的$X \subseteq N$，其$|X| = p$的，则$|\overline{X}| = n - p$，此时，这些不等式的左端是一个常数

$C(n-p)(n-p-1)/2$。

右端，在取$X=\{1, 2, \cdots, p\}$时达到极小，$\sum_{i=p+1}^{n} a_i$

故原有的2^n个条件，乃转化为下列条件

$$C(n-p)(n-p-1)/2 \leqslant \sum_{i=p+1}^{n} a_i$$
$$(p=0, 1, 2, \cdots, n-1)$$

将两端同加

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = Cn(n-1)/2,$$

得

$$\sum_{i=1}^{p} a_i \leqslant Cn(n-1)/2 - C(n-p)(n-p-1)/2,$$

或

$$\sum_{i=1}^{p} a_i \leqslant Cp(2n-p-1)/2 \quad (p=1, 2, \cdots, n)。$$

于是得下

定理7.10 已给n个非负整数$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$。使$n$个球队在一场竞赛中，每二队均比赛$C$次，比赛结束后，$a_1$，$a_2$，…，$a_n$能成为胜利记录的充分和必要条件是

$$(A) \quad \sum_{i=1}^{p} a_i \leqslant Cp(2n-p-1)/2 \quad (p=1,2,\cdots,n)$$

在条件（A）中，当$p=n$时，等号成立。

定理7.10 用图论的语言，加以描述，便是

定理7.10′ 已给n个非负整数$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$，存在$n$阶有向图$G$，具性质：

（1）$d_G^+(x_i)=a_i \quad (i=1, 2, \cdots, n)$

（2）$d_G^+(x_i, x_j)+d_G^+(x_j, x_i)=C$,

$(i \neq j, \ i, j=1, 2, \cdots, n)$

(3) $d_G^+(x_i, x_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$

其充分和必要条件是

$$(A) \quad \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \leqslant Cp(2n-p-1)/2, \ (p = 1,2,\cdots,n)$$

其中，当$p = n$时，取等号。

证 显然。

在这个定理里，条件(3)实际上表示图G是一个无环图。

在定理7.10′里，取$C = 1$，乃得下

定理7.11 已给非负整数$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_n$，存在竞赛图，取$\alpha_1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_n$ 为各顶的外半次，其充分和必要条件是

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \leqslant p(2n-p-1)/2 \qquad (p = 1, 2, \cdots, n),$$

当$p = n$时取等号。

证 显然。

习 题

1. 设S, T为图$G = (X, E)$中顶集X的子集，且$S \cap T = \phi$。试证明：一端在S中，另一端在T中点互质的链的最大条数等于删去后就分隔S与T的顶点的最小顶点数。(即删去后没有一个分支能同时包含S的顶点和T的顶点。)

2. 设有一个运输网络$\mathscr{N} = (N, \mathscr{A})$，以$s$为发点、$t$为收点，每条弧上的容量为$c(x, y)$。对任一个集合$A \subseteq N - \{s, t\}$，$F(A)$，$d(A)$的意义如§2中引理所述。试证：如果对某个$A \subseteq N - \{s, t\}$成立，对一切满足条件$A \subseteq B \subseteq N - \{s, t\}$的集合$B$有$C(\bar{B}, B) \geq d(B)$成立，则$F(A) \geq d(A)$。

3. 利用上题结果试证明下列命题(Gale, 1957)：已给一网络$\mathscr{N} = (N, \mathscr{A})$，弧$(x, y)$上的容量为$c(x, y) \geq 0$，发点为$s$，收点为$t$，则存在一个许可流饱和引向收点$t$的每条弧的充要条件是：$C(\bar{B}, B) \geq d(B)$对一切$B \subseteq N - \{s, t\}$成立。

4. 利用上题结论进一步证明：当且仅当$F(B)\geq d(B)$对一切$B\subseteq\{y\mid(y,t)\in\mathscr{A}\}$成立时，存在一个流$f$满足$f(x,y)\leq C(x,y)$且$f$饱和所有形如$(y,t)$的弧。其中$d(B)$、$F(B)$意义如前。

5. 试证明：存在一个竞赛图其出次为$r_1, r_2, \cdots, r_n$且$r_1\leq r_2\leq\cdots r_n$，当且仅当下二条件成立：

$$\sum_{i=1}^{k} r_i \geq \binom{k}{2}, \quad (k=2,3,\cdots,n-1), \quad \sum_{i=1}^{n} r_i = \binom{n}{2}$$

(Landau [1953], Moon [1963])

6. 已知一个图G，其顶点为$x_1, x_2, \cdots, x_n$及一组整数偶$\{(r_i, s_i)\mid i=1, 2, \cdots, n\}$。试证：图$G$含有一个部分图$H$使得：$d_H^+(x_i)=r_i$，$d_H^-(x_i)=s_i$ $i=1, 2, \cdots, n$成立的充分必要条件是

$$\sum_{i=1}^{n} \min\{r_i, d_G^+(x_i, A)\} \geq s(A), \quad A\subset X$$

以及 $\sum_{i=1}^{n} r_i = \sum_{i=1}^{n} s_i$ 成立

由此并证明定理7。

7. 对序列$r_1\geq r_2\geq\cdots\geq r_n$定义序列$\{\overline{r_k}\}$，以$\overline{r_k}$表示$i<k$且$r_i\geq k-1$的下标个数与$i>k$且$r_i\geq k$的下标个数之和，称$\{\overline{r_k}\}$为$\{r_i\}$的修正共轭序列，试证明：如已知非负整数偶$(r_i, s_i)$的序列且：$r_1\geq r_2\geq\cdots\geq r_n$，$s_1\geq s_2\geq\cdots\geq s_n$，则存在一个1—图$H$，无环，且：

$d_H^+(x_i)=r_i$，$d_H^-(x_i)=s_i$对$i=1, 2, \cdots, n$都成立的充分必要条件是：

$$\sum_{i=1}^{k} \overline{r_i} \geq \sum_{i=1}^{k} s_i, \quad (k=1, 2, \cdots, n-1)$$

及 $\sum_{i=1}^{n} \overline{r_i} = \sum_{i=1}^{n} s_i$ 成立。

8. 设已知非负整数列$d_1\geq d_2\geq\cdots\geq d_n$，$\sum_{i=1}^{n} d_i$是偶数，以$\{\overline{d_i}\}$表示其修正共轭序列，试证明下述条件是彼此等价的：

(1)存在一个单纯图G，其每个顶点x_i具有次数，$d_G(x_i)=d_i$。

(2) $$\sum_{i=1}^{k}\overline{d_i}\geqslant\sum_{i=1}^{k}d_i \qquad (k=1,\ 2,\ \cdots n)$$

(3) $$\sum_{i=1}^{k}d_i\leqslant k(k-1)+\sum_{j=k+1}^{n}\min\{k,d_j\},$$

$$(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

(Erdös, Gallai (1960))

9、试证明：数偶集合$\{(r_i,\ s_i)\mid i=1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$组成一个以$x_1$为根的树形图的半次偶序列，即对所有$i=1,\ 2,\ \cdots n$有：$d^+(x_i)=r_i$，$d^-(x_i)=s_i$的充分必要条件是：

$$s_1=0,\ s_i=1\quad i\neq 1,\ 及\ \sum_{i=1}^{n}r_i=n-1$$

10 如有向图G中每点x均有$d_G^+(x)\leq 1$，则称G为一函数(functional)图。试证明：数偶集合$\{(r_i,\ s_i)\mid i=1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$成为一个强联结的(即任二顶点之间均有有向路相互连接的)函数图的半次偶序列的充分必要条件是：$r_i=s_i=1$，对于$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$都成立。

11 设$d_1\geq d_2\geq\cdots\geq d_n$为非负整数列，且$\sum_{i=1}^{n}d_i$是偶数。试证：存在一个无环$p$—图$G$其顶点$x_i$的次数满足：$d_G(x_i)=d_i$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$，当且仅当：

$$\sum_{i=1}^{k}d_i\leqslant\min_{\substack{l\geq k\\ l\leq n}}\{\sum_{i=l+1}^{n}d_i+pkl-pk\}\ (k=1,2,\cdots,n)$$

成立。

12. 设$d_1\geq d_2\geq\cdots\geq d_n$为非负整数列，$\sum_{i=1}^{n}d_i$为偶数。试证：存在一个无环$p$—图$G$其顶点$x_i$的次数满足：$d_G(x_i)=d_i$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$，当且仅当：

$$\sum_{i=1}^{k}d_i\leqslant pk(k-1)+\sum_{i=k+1}^{n}\min\{pk,\ d_i\}$$

($k=1$, 2, …, n)成立。 (V Chungphaisan)

13 设$d_1\geq d_2\geq\cdots\geq d_n$为一非负整数序列，$\overline{d}_1, \overline{d}_2, \cdots$ 为其修正共轭序列。试证明：或者有

$$\overline{d}_1\geq\overline{d}_2\geq\cdots\geq\overline{d}_i\geq\cdots,$$

或者存在一个k使得有

$$\overline{d}_1\geq\overline{d}_2\geq\cdots\geq\overline{d}_k,\ \overline{d}_{k+1}=\overline{d}_k+1\geq\overline{d}_{k+2}\geq\overline{d}_{k+3}\geq\cdots$$ 成立。

第八章　图的联接性

§1　断集、断量与断量的基本性质

已给图$G=(X,E)$，设其每二顶之间，均有链相联，则这个图称为是**联接的**。设这个图可分成$p(\geqslant 2)$个联接的分子图，则这个图是**断的**。这一章我们主要研究单纯联接图的不同的联接情况，即所谓**图的联接性**，这是图的最基本的性质之一。

一个联接图（以下不特别说明都指单纯联接图）若去掉其若干个顶，使图至少断成两块联接的部份，各不为ϕ，或只剩下一个孤立点，则这个顶点集A，称为图G的**点断集**。设这些断集A，构成集合$\mathscr{A}$，定义

$$\kappa(G)=\min_{A\in\mathscr{A}}\{|A|\}$$

$\kappa(G)$称为图G的**点断量**（简记为κ）简称**断量**。一个有$p(\geqslant 2)$个联接分子图的图G，本来就是断的，故其$\kappa(G)=0$，反之亦然。

当$\kappa(G)=1$，则图G中至少有顶x，去掉顶x图被截断，这样的顶称为**图的断点**。

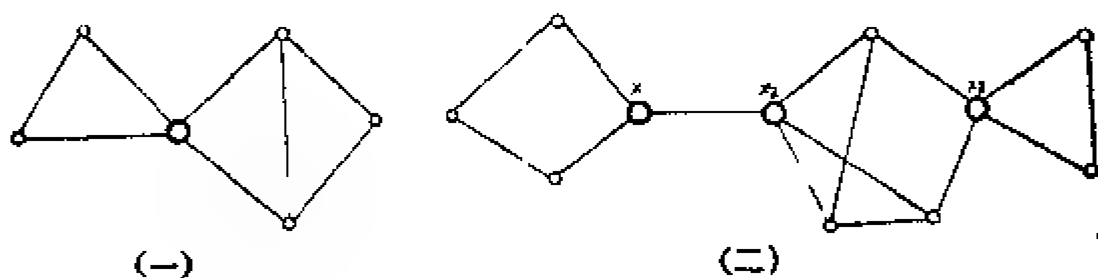


图 8.1

图8.1中的（一），x是一个断点，在（二），x_1，x_2，x_3都是断点。

树T总有断点，故$\kappa(T)=1$，但有断点的当然不一定是树。

一个联接图G，若去掉其一个边集B，图至少被截断成二联接的部份图或蜕化成一个孤立点，则边集B，称为图G的**边断集**①。命所有这些边断集成一集合$\mathscr{B}$，定义

$$\lambda(G)=\min_{B\in\mathscr{B}}\{|B|\},$$

$\lambda(G)$称为图G的**边断量**。若$\lambda(G)=1$，则图G中至少存在一边，去掉这边，图被截断。这样的边称为图的**桥边**。譬如一棵树，其每一边都是一个桥边。又如图（8.1）中的（二），其边(x_1, x_2)是一个桥边。

于此，应注意的是，当去掉图的一顶，与这顶相联的边同时也被去掉，但去掉一边时，这条边的两个端点，仍保留在图内。

若图G是K_n，显见$\kappa=\lambda=n-1$。若图G不含跨顶的K_n则κ，$\lambda<n-1$。

设图G的极小次是δ，显见

$$\lambda(G)\leqslant\delta,$$

因在具极小次δ那个顶x上，去掉交于x的δ条边，图G便被截断。于此，有下

定理8.1 $\kappa(G)\leqslant\lambda(G)\leqslant\delta$。

证 往证$\kappa(G)\leqslant\lambda(G)$即足。

设图G的一个极小边断集为$L=\{e_1, e_2, \cdots, e_\lambda\}$。在其中去掉$\lambda-1$条边，保留一边，譬如去掉$e_2$，…，$e_\lambda$保留$e_1$，据定义，所得的图$G'$仍是联接的。可是在图$G$中，最多去掉$\lambda-1$个点，便已可起到这样的作用，在$e_1$的两个端点中，再任去一点，图$G$便被截断，故

$$\kappa(G)\leqslant\lambda(G)。\qquad（证毕）$$

① 在网络流的理论中，我们曾把它称为截集，不过这里的断量，和那里的截量意义是不一样的。

已给联接图G，任给整数$k\geqslant 1$，当$\kappa\geqslant k$，图G称为是k(点)联的，简称k—联，同样，若$\lambda\geqslant k$，图G称为是k—边联的，只有图$G=K_n$，同时是点（边）（$n-1$）联的。

定理8.2 已给n阶图$G=(X, E)$，$n\geqslant k+1\geqslant 2$，若图$G$不是$k$—联的，则图$G$的顶集$X$有二互质的子集$X_1$与$X_2$，其中$|X_1|=n_1\geqslant 1$，$|X_2|=n_2\geqslant 1$满足条件

$$n_1+n_2+(k-1)=n,$$

且X_i中任一点，其最大次数不超过

$$n_i+k-2。\qquad (i=1,2)$$

证 由于图G不是k—联的，故

$$\kappa\leqslant k-1,$$

在图G中存在断集C，$|C|=k-1$，C将X截成二子集X_1、X_2，X_1，$X_2\neq\phi$，$X_1\cap X_2=\phi$。设$|X_1|=n_1(\geqslant 1)$，$|X_2|=n_2(\geqslant 1)$，则

$$n_1+n_2+k-1=n,$$

取$X_i\cup C$，则$|X_i\cup C|=n_i+k-1$。由于X_1，X_2被C隔断，X_1中任一点与X_2中任一点均不能相邻，故$X_i\cup C$中的点，其极大次数不超过n_i+k-2，$(i=1,2)$。

（证毕）

据定理8.2 当$k=1$，则$\kappa(G)=0$故图G是不联接的。因此，有下

推理8.2a 设图G的顶点编号为x_1，x_2，…，x_n使

$$d_G(x_1)\leqslant d_G(x_2)\leqslant\cdots\leqslant d_G(X_n)=\Delta,$$

且 $d_G(x_j)\geqslant j$（对一切$j\leqslant n-\Delta-1$均成立），

则G是联接的。

证 设G不联接，在定理8.2中取$k=1$，设$x_n\in X_1$，

则 $|X_1|=n_1\geqslant\Delta+1$，$|X_2|=n_2\leqslant n-\Delta-1$，

若$x_{n_2}\in X_2$，则$d_G(x_{n_2})\leqslant n_2-1$。但原设$d_G(x_{n_2})\geqslant n_2$，这是矛盾。

若$x_{n_2}\in X_2$，在X_2中至少将有一点x_{n_2}'，其中

$$n_2'>n_2，据假设d_G(x_{n_2}')\geqslant d_G(x_{n_2})\geqslant n_2，$$

但据定理8.2，$d_G(x_{n_2})\leqslant n_2-1$，这是矛盾。

（证毕）

推理8.2b 设图$G=(X,E)$的顶点编号为$x_1,x_2,\cdots,x_n$使$d_G(x_1)\leqslant d_G(x_2)\leqslant\cdots\leqslant d_G(x_n)=\varDelta$，并设存在整数$k$，$0\leqslant k<n$，使

$d(x_j)\geqslant j+k-1$对一切$j=1,2,\cdots,n-1-d_G(x_{n-k+1})$

均成立，则图G是k—联的。

证 在图G中任取$A\subset X$，$|A|=k-1$。作

$$G'=G_{X-A}，$$

并序列G'的顶，成$x_1',x_2',\cdots,x'_{n-k+1}$使

$$d_{G'}(x_1')\leqslant d_{G'}(x_2')\leqslant\cdots\leqslant d_{G'}(x'_{n-k+1})=\varDelta'，$$

就图G'而言，设

$$h\leqslant|X'|-\varDelta'-1，$$

则

$$h\leqslant(n-k+1)-d_{G'}(x'_{n-k+1})-1。$$

据G'的构造

$$d_{G'}(x'_{n-k+1})\geqslant d_G(x_{n-k+1})-(k-1)，$$

故

$$h\leqslant(n-k+1)-[d_G(x_{n-k+1})-k+1]-1$$
$$=n-d_G(x_{n-k+1})-1。$$

据推理假设

$$d_G(x_h)\geqslant h+(k-1)，$$

由此可知

$$d_{G'}(x'_h)\geqslant d_G(x_h)-|A|\geqslant h+(k-1)$$
$$-(k-1)=h$$

据推理8.2a，知图G'是联接的。图G'是在G中任意去掉顶集A得到的图，即在图G中任意去掉$k-1$个顶，图G均不被截断，

故G是k联的。

（证毕）

推理8.2c 设图G是n阶的，且不是完全图，则

$\kappa(G) \geqslant 2\delta(G)+2-n$。

证 图G不是$(\kappa+1)$联的，取$k=\kappa+1$代入定理8.2便有

$n-n_1+n_2+\kappa,\ n_i+\kappa-1 \geqslant \delta,\quad (i=1,2)$

故 $\kappa \geqslant 2\delta+2-n$。

（证毕）

定理8.3 已给非负整数n, δ, κ，与λ，存在n阶单纯图G，使$\delta(G)=\delta$，$\kappa(G)=\kappa$，$\lambda(G)=\lambda$，其充分和必要条件是下三条件有一成立：

(i) $0 \leqslant \kappa \leqslant \lambda \leqslant \delta < [n/2]$

(ii) $1 < 2\delta+2-n \leqslant \kappa \leqslant \lambda=\delta < n-1$

(iii) $\kappa=\lambda=\delta=n-1$。

证 必要性

(a) $G=K_n$，则$\kappa=\lambda=\delta=n-1$此即(iii)

(b) $G \neq K_n$，于此分两种情况：

(α) 图G是断的。在定理8.2中取$k=1$，便有

$\kappa=\lambda=0$，又$2\delta+2-n \leqslant 0$导致$\delta \leqslant \frac{n-2}{2} < [n/2]$

此即(i)。

当然，一个联接图，其$n, \kappa, \lambda, \delta$，也可能满足(i)，例如图8.2便是这样一个图。

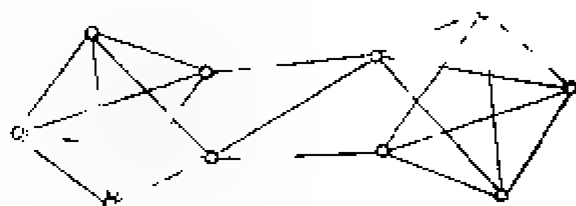


图 8.2

这个图它的$n(G)=10$，$\kappa=2$，$\lambda=3$，$\delta=4$

(β) 图G是联接的，若$2\delta+2-n \leqslant 0$，出现情况(i)，

若 $2\delta+2-n\geqslant 1$，出现情况（ii）。一条长为2的链满足条件（ii）。

充分性　设已给n，κ，λ，δ，满足三条件中任一条，往证恒有图G，确取 $|G|=n$，$\kappa(G)=\kappa$，$\lambda(G)=\lambda$，$\delta(G)=\delta$。

（a）当（i）成立，由于$\delta<[n/2]$，取$G_1=K_{\delta+1}$，$G_2=K_{n-\delta-1}$，又由于$\kappa\leqslant\delta$，在G_1中取u_1，u_2，…，u_κ等κ个点，同样在G_2中取κ个点，v_1，v_2，…，v_κ，联边u_1v_1，u_2v_2，…，$u_\kappa v_\kappa$，再联$\lambda-\kappa$条边u_1v_j（$v_j\in G_2$，$v_j\neq v_i$（$i=1, 2, \cdots\kappa$）。这样的点，由于$\lambda\leqslant\delta<[n/2]$总是存在的）便得图$G$。满足（i）。下图 8.3 便是这样一个图，其$n=|G|=9$，$\kappa=1$，$\lambda=2$，$\delta=3$。

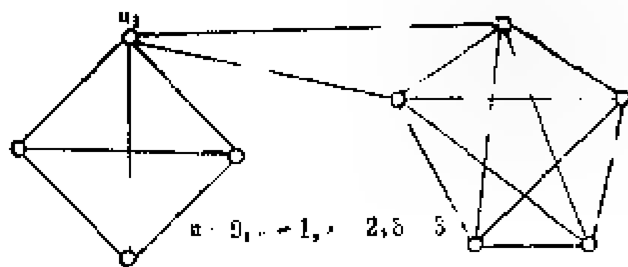


图 8.3

（b）当（ii）成立，取$G_1=K_\kappa$，$G_2=K_a$，$G_3=K_b$，其中$a=[(n-\kappa)/2]$，$b=[(n-1-\kappa)/2]$。命$G_0=G_1+(G_2\cup G_3)$*，再向G_0加进一点v，联到G_1的各顶，并联到G_3的$\delta-\kappa$个顶，便得满足要求的图G。下图8.4便是这样一个图，读者不难验证这个作法的正确性。

（c）当（iii）成立，取$G=K_n$即得。

---

*. 两个图G_1与G_2的并记作$G_1\cup G_2$，定义为：$V(G_1\cup G_2)=V(G_1)\cup V(G_2)$，$E(G_1\cup G_2)=E(G_1)\cup E(G_2)$，类似地可以定义多个图的并。

两个图G_1与G_2的联记作G_1+G_2，它由$G_1\cup G_2$ ……G_1的……到G_2的每个顶点的边所组成。类似地可以定义多个图的联。

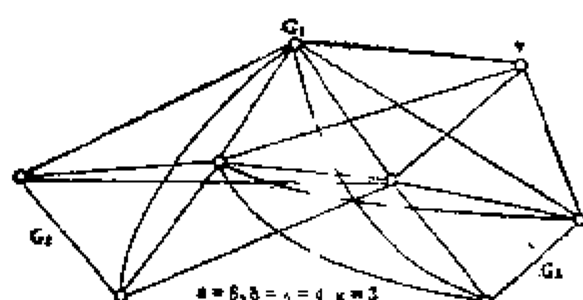
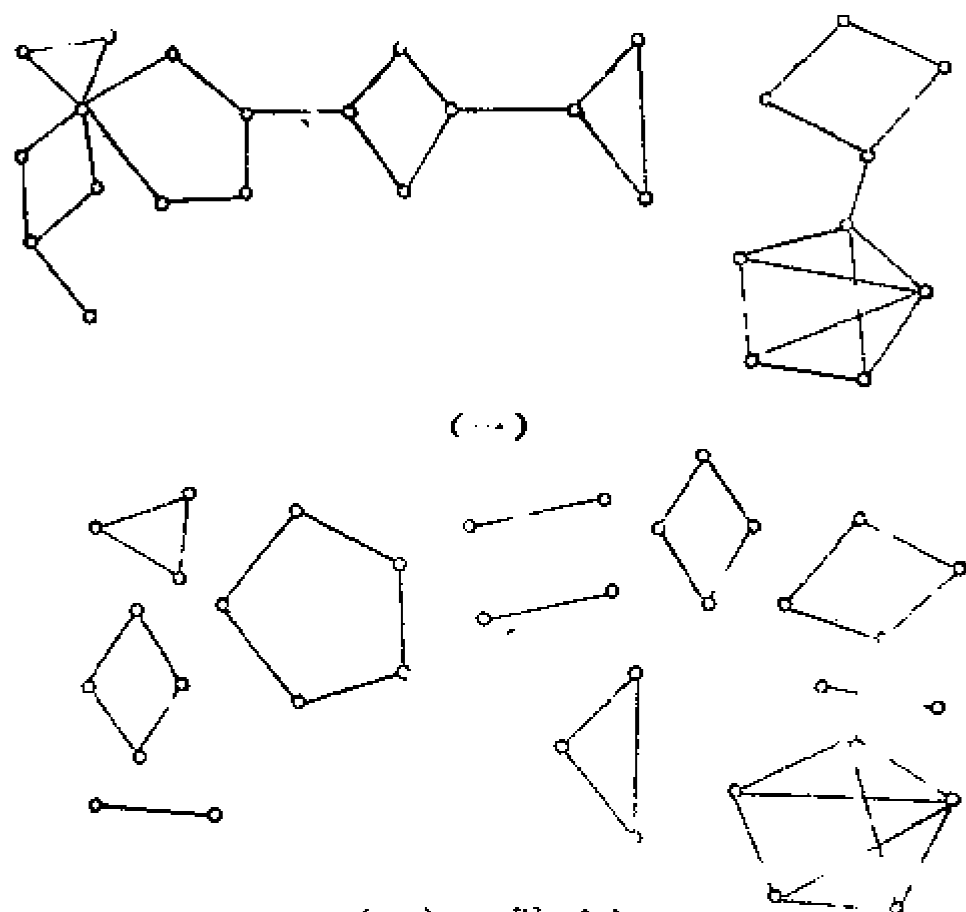


图 8.4

§2 集 块

已给图G，设子图G_A是图G的无断点的联接子图，且 G_A 是具此性质的最大子图，则G_A称为图G的一个**集块**。集块里是不含桥边的。又一个图G是2一联的，当且仅当这个图是联接的，其阶$n\geqslant 3$，且不含断点。故一个集块或是2一联的（当$|A|>2$）或是一条桥边（当$|A|=2$）或者仅是一个孤立点（当$|A|=1$）。

例：下图8.5（一）是原图，分离成集块为（二）：



（一）

（二） 图 8.5

以下将研究一个单纯联接图，其断点和其边数之间的关系。

一个n（$\geqslant 2$）阶的单纯联接图G，总可作出其跨顶树，但每个树至少有二悬挂点（推理2.3₁），很明显，这样的顶，不可能是图G的断点。故任一单纯联接图G，至少有二非断点。

定理8.4（Ramachandra Rao[1968]）阶$n\geqslant 2$的单纯联接图G，具r个断点，这种图所可能含有的极大边数是

$$\binom{n-r}{2}+r。$$

证 1．由于图G至少含二非断点，$n-r\geqslant 2$恒成立，故定理中的公式是有意义的。

2．联接图G，既有r个断点，按上面的办法，将G自断点处分开，至少可得$r+1$个集块。命p为其集块的总个数，则$p\geqslant r+1$，且每一集块，至少含二顶点。设第i个集块的顶数为n_i，对集块的个数进行归纳，可知：

$$\sum_{i=1}^{p} n_i = n+p-1。$$

3．设n与r固定，分配集块的个数，并尽可能将每个集块变成集团*，则这样的单纯联接图G，所可能包含的极大边数将是：

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{p}\binom{n_i}{2}\Big/\sum_{i=1}^{p} n_i = n+p-1;\ n_1,n_2,\cdots,n_p\geqslant 2;\right.$$

$$\left. p\geqslant r+1\right\}$$

$$=\max\sum_{i=1}^{p}\frac{n_i(n_i-1)}{2}$$

$$=\max\sum_{i=1}^{p}\left(\frac{n_i^2}{2}-\frac{n_i}{2}\right)$$

---

*由n个点组成的完全图，称为一个集团。

$$=\max\left\{\sum_{i=1}^{p}\frac{n_i^2}{2}-\frac{1}{2}(n+p-1)\right\}$$

$$=\max\left\{\left(\sum_{i=1}^{p}n_i\right)^2\Big/2-\sum_{i\neq j}n_in_j-\frac{1}{2}(n+p-1)\right\}$$

$$(i,\ j=1,2,\cdots,p)$$

$$=\max\left\{\frac{(n+p-1)^2}{2}-\frac{1}{2}(n+p-1)-\sum_{i\neq j}n_in_j\right\}$$

$$(i,\ j=1,2,\cdots,p)$$

$$=\max\left\{\binom{n+p-1}{2}-\sum_{i\neq j}n_in_j\right\}\quad(i,j=1,2,\cdots,p)。$$

在条件$n_i\geqslant 2$，$\sum n_i=n+p-1$，取$n_1=n_2=\cdots=n_{p-1}=2$，$n_p=(n+p-1)-2(p-1)=n-p+1$，

将使$\sum_{i\neq j}n_in_j$达到极小。

亦即使$\sum_{i=1}^{p}\binom{n_i}{2}$达到极大，

故

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{p}\binom{n_i}{2}\Big/\sum_{i=1}^{p}n_i=n+p-1;n_i\geqslant2,\ p\geqslant r+1\right\}$$

$$=\max_{p\geqslant r+1}\left\{p-1+\binom{n-p+1}{2}\right\}。$$

由于$\binom{q}{2}-\binom{q-1}{2}=q-1$，只须$q-1\geqslant1$，便有

$$\binom{q}{2}+(n-q)\geqslant\binom{q-1}{2}+(n-q+1)。$$

故
$$\max\left\{\sum_{i=1}^{p}\binom{n_i}{2}\Big/\sum_{i=1}^{p}n_i=n+p-1;n_i\geqslant2,\ p\geqslant r+1\right\}$$

$$=\binom{n-r}{2}+r。$$
（证毕）

这样的边数极大的图，甚易构造如次：作集团K_{n-r}，再自集团的任一顶，作一长为r的初级链。这个图确有$\binom{n-r}{2}+r$条边，且在n, r固定的情况下，其边数达到极大。

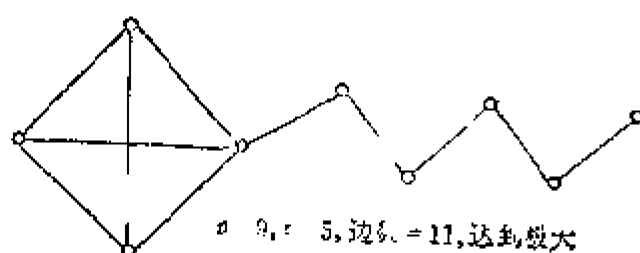


图 8 6

§ 3 蒙格尔定理在图的联接性上的应用

在第七章§1里，我们用网络流的理论，证明了无向图与有向图的蒙格尔定理。本节我们将往研究蒙格尔定理在图的联接性上的应用。

定理8.5 单纯联接图G是h—联的，其充分和必要条件是任二相异点s与t之间，可联h条顶互质的链。

证 设$h=1$，由于图G是联接的，按定义，s与t之间应有链相联。故以下就$h\geqslant 2$来证明本定理。

必要性 设$G=(X, E)$是已给的h—联图，若s与t不相邻，据定理7.4，s与t之间可联h条点互质的链。

若s与t相邻，而定理不成立，自G去掉边〔s, t〕得图G'。在图G'里，不能有$h-1$条点互质的链，联接s与t。故据同一定理，在G'里存在点集$A\subset X-\{s, t\}$其$|A|\leqslant h-2$，截断s与t。故

$$|X|-|A|\geqslant h+1-(h-2)=3,$$

即在$X-A$中至少存在一点$c\neq s, t$，$c\notin A$。

在图G'中若c与s相邻，则c与s有链相联，不经过A（即这个链，不用A中的点）。若c与s不相邻，在原图G中，c与s之间有h条点互质的链相联。在G'中，c与s之间应有$h-1$条点互质的链相联。但$|A|<h-1$，故其中至少有一条链，不过点集A。同理在c与t之间，也至少有一条链不过A。故在图G'中s与t之间有链相联，不过点集A，这与A的定义相矛盾。故当s与t相邻，定理同样成立。

充分性　设任二相异点之间，可用h条点互质的链相联，往证图G是h—联的。首先，这个图是联接的。其次，最多只有一条链，其长为1，而其余$h-1$条链，至少都包含一点异于s与t，故其合，至少包含$h-1$个不同的点，异于s与t。

故　　　　$n\geqslant(h-1)+2=h+1>h$,

此即　　　　$h\leqslant n-1$。

最后图G不能有断集A，其$|A|<h$。否则，$X-A$至少将含二分子图，在每个分子图中分别各取一点s与t，按假设，s与t之间有h条点互质的链相联。这些链都应通过A，可是$|A|<h$，A中不可能有h个不同的点这是矛盾。故图G的任一断集A，其维$|A|\geqslant h$。故

$$\kappa(G)=\min\{|A|\}\geqslant h,$$

亦即图G是h—联的。　　　　（证毕）

推理8.5a　设图G是h—联的（$h\geqslant 2$），则在G里任意去掉一边或任意去掉一顶所得图G'是（$h-1$）—联的。

证　在新图G'中，任二相异顶s与t之间，至少有$h-1$条点互质的链相联。　　　　（证毕）

推理8.5b　设图G是h—联的，（$h\geqslant 2$），则G的任二相异顶s与t，恒同在$\binom{h}{2}$个不同初级圈上。

证　在s与t之间的h条点互质的链上，任取二条链便构成一个初级圈含s与t。　　　　（证毕）

推理8.5$_c$ 设图G是h—联的，$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_h\}$，其中h个点互不相同。又$a\in X-B$，则自a到B可联h条点互质的（点a除外）初级链。

证 任取另一个新点z，加进z，自z到b_i（$i=1,2,\cdots,h$）各联一边，得新图G'。往证G'是h—联的。

在图G'中，任取顶集S，其维$|S|\leqslant h-1$，若$z\notin S$，则$G'-S=G\cup\{z\}-S=(G-S)\cup\{z\}$是联接的。若$z\in S$则$G'-S=G\cup\{z\}-S=G-(S-z)$，$|S-z|<h-1$，故$G'-S=G-(S-z)$是联接的。故任取$h-1$个点的集合，不能截断图$G'$，故$G'$是$h$—联的。$G'$既是$h$—联的，据定理8.5，$a$与$z$之间应有$h$条点互质的链相联，这些链必须通过$B$中诸点，故$a$到$B$中各有一条链，除$a$点外无公共点。

（证毕）

其实，这个推理的逆也成立，因若$|G|\geqslant k+1$，但顶x,y被$k-1$个点截断，命这些点的集合是S。则x到$\{S\cup y\}$便不可能有k个点互质的链。

自a到B的k条点互质的初级链（a除外）所构成的图形称为a—B理。

推理8.5$_d$ 设图$G=(X,E)$是h—联的（$h\geqslant 2$）。在G中任取二相异边e_1与e_2，并另取$h-2$个相异顶a_1，a_2，…，a_{h-2}，恒存在初级圈通过这些边与顶。

证 1．设$h=2$，此时只有二边e_1与e_2，在e_1与e_2上分别各加一点$s\in e_1$，$t\in e_2$，据推理8.5$_c$的证，知所得的图G'仍是2—联的。故s与t在一个初级圈上，这个初级圈须过e_1与e_2二边。

2．让$h>2$，用归纳证法，设对一切k—联的图，当$k<h$时，定理成立，往证定理对于h也成立。

可以假定$a_1,a_2,\cdots,a_{h-2}$诸点没有一个是e_1与e_2的端点，否则点数少于$h-2$，据归纳假设定理已成立。

去掉点a_{h-2}，则图$G-a_{h-2}$是$(h-1)$–联的（推理8.5$_a$）。据归纳假设，边e_1，e_2与点a_1，a_2，…，a_{h-3}应在一个初级圈μ_0上，命B为μ_0上的顶集。则B除包含a_1，a_2，…，a_{h-3}之外，至少应再含e_1与e_2的端点，故$|B|\geqslant h$，据推理8.5$_c$自a_{h-2}到B（即到μ_0上）可联h条项互质的初级链，并可假定这些链各只与μ_0相交于一点，设这些初级链是$\mu_1[a_{h-2}, b_1]$，$\mu_2[a_{h-2}, b_2]$，…，$\mu_h[a_{h-2}, b_h]$并可假定b_1，b_2，…，b_h诸点是按这样的顺序排列在圈μ_0上的，这些点在μ_0上共构成h个间隔，于是便可假定a_1，a_2，…，a_{h-3}，e_1，e_2等$h-1$个元素，没有一个在某一间隔内，设这个间隔是$[b_1, b_2]$，则下列初级圈（如图8.7所示）

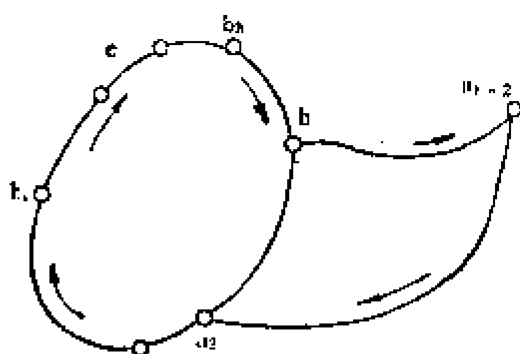


图 8.7

$$\mu=[a_{h-2}, b_2]+\mu_0[b_2, b_h]+\mu_0[b_h, b_1]-\mu_1[a_{h-2}, b_1]$$

便是定理所要求的那样的圈。

（证毕）

推理8.5$_e$ 设单纯图G是h–联的（$h\geqslant 2$），在G上任取h个点，恒有初级圈，过所给的h点。

证 设所给的点是a_1，a_2，…，a_h，可任取二边$e_1=[x, a_{h-1}]$，与$e_2=[y, a_h]$。据推理8.5$_d$，有初级圈过e_1，e_2，a_1，a_2，…，a_{h-2}，这个初级圈含所有原给的h个点。

（证毕）

关于边联的问题，据定理7.1与定理7.2，可仿照点联的方法进行研究，这里就不详细讨论了。下面再给出几个定理，作为本节的结尾。

定理8.6 联接图G的一边是一条桥边当且仅当图G里没有初级圈包含这条边。

证 设边$[a, b]$不是桥边，舍去该边，图不被截断。故项

a与b之间，有初级链μ〔a, b〕相联，边〔a, b〕与初级链μ〔a, b〕构成一个初级圈。

设边〔a, b〕在一个初级圈上，舍去该边，将不截断原图，故边〔a, b〕不是桥边。

（证毕）

定理8.7 联接图G是2—边联的，当且仅当其每一边都在一个初级圈上。

证 自定理8.6知图G没有桥边。

（证毕）

总结以上所论专就2—联图来讲，下二定理显然都成立。

定理8.8 设图G是联接的，其阶$n \geqslant 3$，则下述条件是等价的：

（1） G是2—联的。

（2） G无断点。

（3） 任二点在同一初级圈上。

（4） 任二边在同一初级圈上。

（5） 任一项和任一边在同一初级圈上。

证 显然。

定理8.9 图G是联接的，其阶$n \geqslant 3$，则下述条件是等价的：

（1） G是2—边联的。

（2） G无桥边。

（3） 任二边在同一圈上。

（4） 任二项在同一圈上。

（5） 任一边和任一项在同一圈上。

证 显然。但须注意的是，本定理中的圈，不是初级圈。即在这样的圈里，可能有重复的项，如下图8.8是2—边联的，但它是1—点联的。其中任二项或任二边，则不一定在同一个“初级”圈上，但在同一个无重复边的圈上。

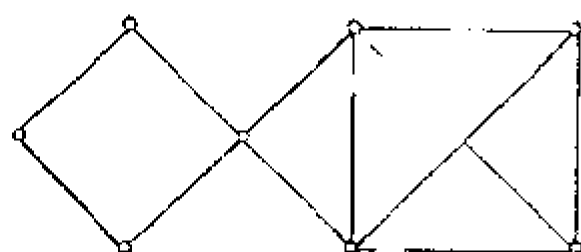


图 8.8

推理8.9₁ 图$G=(X,E)$，其阶$n\geqslant k+1(k\geqslant2)$。图$G$是$k$-联的，当且仅当对每一$(k-2)$子集$U(\subset X)$，在子图$G_{X-U}$中恒有初级圈，含其中任二相异顶$x$与$y$。

推理8.9₂ 图$G=(X,E)$至少含$k+1(k\geqslant2)$条边。图G是k-边联的，当且仅当对每一$(k-2)$-子集$F(\subset E)$，部份图$G-F$里恒有圈，包含其中任二相异边e与f。

证 应用定理8.8与定理8.9即可推得本推理。

§4 断量与边数

在这一节，我们将研究这样的问题：已给定n个点，假设再给定m条线，用这些点和线，构造出一个单纯图，使其断量κ达到极大，并要求找出这个极大。又若已给定n个点，再给定一个非负整数κ，要求作出一个n阶的单纯图G具已知断量κ，而所使用的边数m达到极小，并要求找出这个极小。下面，我们可以看到，这两个问题实际上是一个问题的两个方面。

定理8.10 （Harary）给定正整数n、m，满足条件

$$0\leqslant n-1\leqslant m\leqslant\binom{n}{2},$$

则 $$\max\kappa(G)=\max\lambda(G)=[2m/n],$$

其中极大是对所有具n个顶m条边的单纯图$G=(X,E)$而言的。

证 1. 当$m<n-1$，图$G=(X,E)$，其中$|X|=n$，$|E|=m$，是不联接的，此时，恒有$\kappa(G)=\lambda(G)=0$，

故在下面的研究中，这种情况排除在外。

对任何图G，恒有

$$n\delta \leqslant 2m,$$

故 $$\delta \leqslant 2m/n,$$

或 $$m \geqslant n \cdot \delta / 2。$$

给定n与m，$\delta = [2m/n]$达到极大，给定n与δ，

则 $$m = \{n\delta/2\}^*达到极小。$$

故若给定n与m，任一图$G=(X, E)$，其$|X|=n$，$|E|=m$的，恒有

$$\kappa(G) \leqslant \lambda(G) \leqslant \delta(G) \leqslant [2m/n]。$$

以下往证，可以实际作出图G来，使

$$\kappa(G) = [2m/n],$$

这样便有

$$\max\kappa(G) = \max\lambda(G) = \max\delta(G) = [2m/n]$$

满足定理的要求。

又可注意，当$m=n-1$，而图G又是联接的，图G是一个树，故

$$\max\kappa(G) = \max\lambda(G) = 1 = \delta(G) = [2m/n]$$

当$m=\binom{n}{2}$，取图$G=K_n$，于是

$$\max\kappa(G) = \max\lambda(G) = \delta(G) = n-1 = [2m/n]。$$

在下面的讨论中，假设已给定n与δ，且只注意情况

$$2 \leqslant \delta < n-1。$$

2．作图

第一步：作初级圈μ_n，含n个顶。

第二步：μ_n上任二顶，其距离$\leqslant [\delta/2]$的，联边。

第三步：如有必要，再联对角线，使相联二顶沿μ_n的距离$\leqslant [n/2]$并使最后所得图的每一顶，其次数是δ，最多只有一顶，其次数是$\delta+1$。

这样作得的图，记为$H_{\delta,n}$。

例 按上法，作得图G如下：

（一）$n=8$，$\delta=4$，（二）$n=8$，$\delta=5$

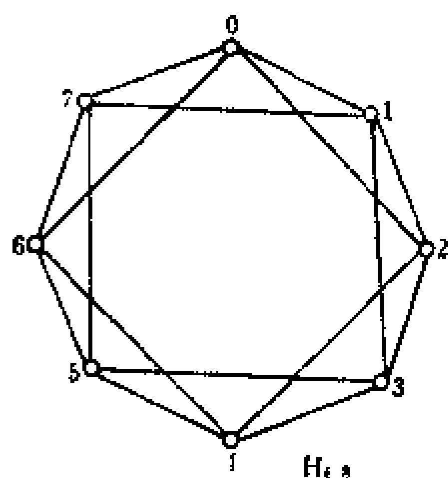


图 8.9（一）$H_{4,8}$

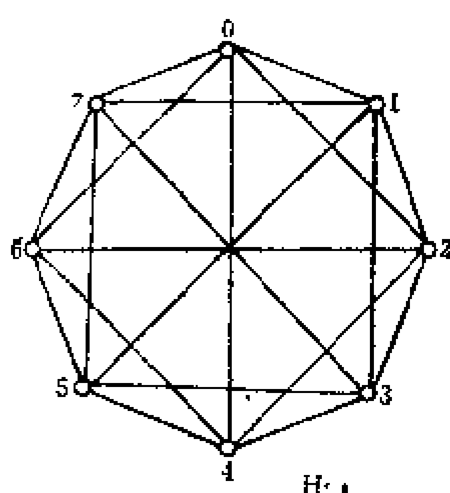


图 8.9（二）$H_{5,8}$

（三）$n=9$，$\delta=5$　　　　（四）$n=9$，$\delta=6$

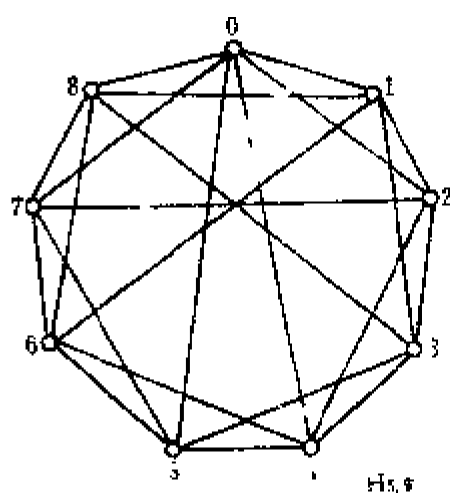


图 8.9（三）$H_{5,9}$

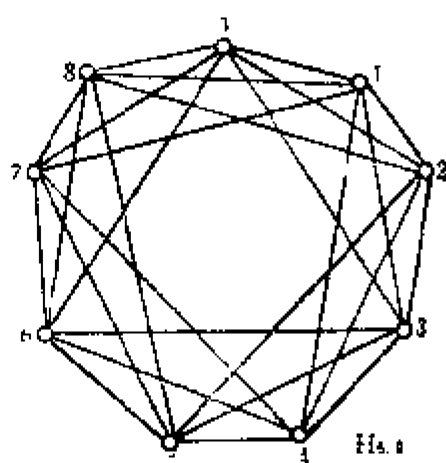


图 8.9（四）$H_{6,9}$

一般，在δ是偶数时，无论n是奇数或偶数，由于$\delta<n-1$，在作图时，只须作完第二步，即已得满足要求的图。因此，在研究一般情况时，只考虑上面（一）、（二）、（三）三种情况。

3，在一般情况，取n个点为0，1，2，…，$n-1$。

（一）$\delta=2r$，按作法，作到第二步，如图（一）、（四）那样，每二顶i，j，其$|i-j|\leqslant\delta/2$（模n）的，均有联边，此时每顶的次数都是δ。

（二）$n=2l$，$\delta=2r+1$，作得的图，如（二）那样，每二顶i,j，其$|i-j|\leqslant r$，均有边相联外，再进行作法的第三步。作圈μ_n的l条对角线，其二顶i，j之差的绝对值$|i-j|=l$，此时，每顶的次数都是$\delta=2r+1$。

（三）$n=2l+1$，$\delta=2r+1$，作得的图，如（三）那样，每二顶i,j，其差的绝对值$|i-j|\leqslant r$的均有联边，二顶i,j之差的绝对值$|i-j|=l+1$的，有联边，并再在一顶i上联到顶j，使$|i-j|=l$，此时第i点的次数是$\delta+1$，其他各顶均为δ。

以上作得的图G，其$|G|=n$，$\delta(G)=\delta$，$m(G)=$〔$n\delta/2$〕*。

4．往证这样作得的图G，具$\kappa(G)=\delta(G)$。

记n个顶点为0，1，2，…，$n-1$，设V'是一个断集，其维$|V'|<\delta$。

再设i,j是被截断的二顶，于是图的n个顶可分成二部份

$$S=\{i,\ i+1,\ \cdots,\ j-1,\ j\}\qquad（模n）$$

$$T=\{j,\ j+1,\ \cdots,\ i-1,\ i\}\qquad（模n）$$

（i）设$\delta=2r$（$<n-1$），$|V'|<2r$，V'与S或T的交集总有一个其维小于r，设

$$|S\cap V'|<r。$$

则在$S-V'$中，总有点i，i_1，i_2，…，j等，使$|i-i_1|\leqslant r$，$|i_1-i_2|$，…，$|i_k-j|\leqslant r$，因而有链，自i通到j，这是矛盾。

（ii）设$\delta=2r+1$，$|V'|<2r$，V'与S或T的交集总有一个其维小于r，如上所证，总可有链自i通到j，这是矛盾。

（iii）设$\delta=2r+1$，$|V'|=2r$，当V'与S或T的交集，其维小于r，如上所证，有链自i通向j，这是矛盾。

(iv) 设$\delta = 2r+1$，$|V'| = 2r$，而$|S\cap V'| = |T\cap V'| = r$，由于$\delta < n-1$，有$r < \frac{n-2}{2}$，$i$与$j$不可能是对角线的端点，故$S$或$T$中，必有一个其所含点数不小于$n/2+1$，设
$|S| \geqslant \frac{n}{2}+1$，则在$S$里总有链自$i$通向$j$，这是矛盾。

综合以上讨论，知$\kappa < \delta$不能成立，于是有

$$\kappa(G) = \lambda(G) = \delta(G) = [2m/n],$$

即$\kappa(G)$达到极大。 （证毕）

由以上论证，可知当给定n与κ（$\kappa < n-1$），则所有的图G中，其$|G| = n$，$\kappa(G) = \kappa$的，其$\min m(G) = [n\kappa/2]^*$。若事先给定$n$与$m$（$m \geqslant n-1$），则所有的图$G$中，其$|G| = n$，$m(G) = m$的，其$\max \kappa(G) = \lambda(G) = \delta(G) = [2m/n]$。

§5 极小2——联图的结构

一个k—联图G，假使去掉它的一边$[x, y]$（以下简写作xy）G便失去了k—联的性质，那么，边xy称为是k—联图G的**关键边**。假使k—联图的每一边都是关键性的，图G便称为是**极小k—联的**。因此一个图G是极小k—联的，其充分和必要条件是这个图G是k—联的，且其每一边是关键性的。

本节，我们将往研究极小2—联图的结构。

在§1我们曾经讲过图G的集块，所谓集块，是图G的一个最大子图，联接，且不含断点。设图G无孤立项，则其集块或是2—联的，或是一个桥边。以下假定图G无孤立项，命其集块的集合是$\{B_1, B_2, \cdots, B_t\}$，取这些集块做项，每二集块$B_i$与$B_j$有断点相联的，联边，便得一个新图，称为原图$G$的**集块图**，记为$B(G)$。设将原图$G$的集块和断点作为新图的顶，凡断点交于集块的便在新图里将此二点联边，这个图叫做原图的**集块断点图**，记作$bc(G)$。由于原图G的任

何圈，总含在一个集块内。故集块一断点图bc（G）是不含圈的，即bc（G）总是一个树。联接而又不是2 联的图，总有断点，它的bc（G）至少是一棵树，含 .悬挂点，这 .点表示两个集块。故联接而又不是2 联的图G，它的bc（G）至少有二端点，是原图的两个集块，如下图8.10（ -）是原图，（二）是它的集块图，（三）是它的集块 断点图：

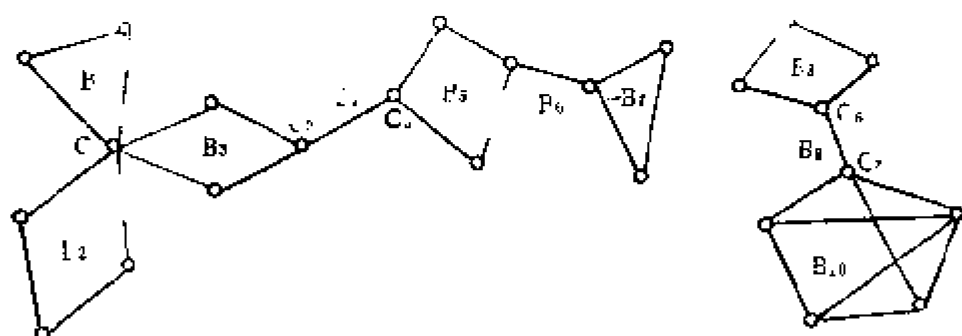


图 8 10 （一）

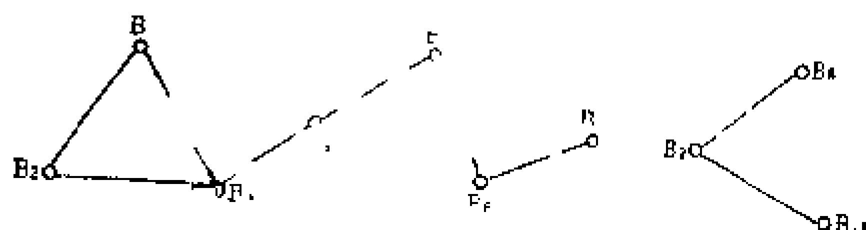


图 8,10 （二） 集块图

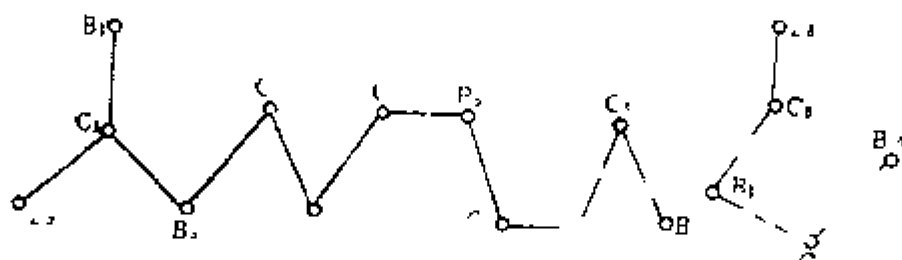


图 8 10 （三） 集块一断点图

上面已经讲过一个k－联图G，它是极小k--联的，其充分和必要条件是G的每一边都是关键性的。那么，已知一个k一联图，又怎么去判断它的边xy是关键性的呢？就2一联图而言，首先有下

引理8.1 已给单纯图G，xy是其一边，命H $G-xy$，则下二论断是等价的：

（i）图G是2—联的，边xy是关键性的；

（ii）图H无孤立顶，x与y都不是图H的断点，H的集块断点图$bc(H)$有一条$[x, y]$链，x属于H的头一个集块，y属于H的末一个集块（图8.11）。

证 （ii）⇒（i）是很明显的。在图H里补上边xy得原图G，这个图显是2—联的，但H则不是2—联的。

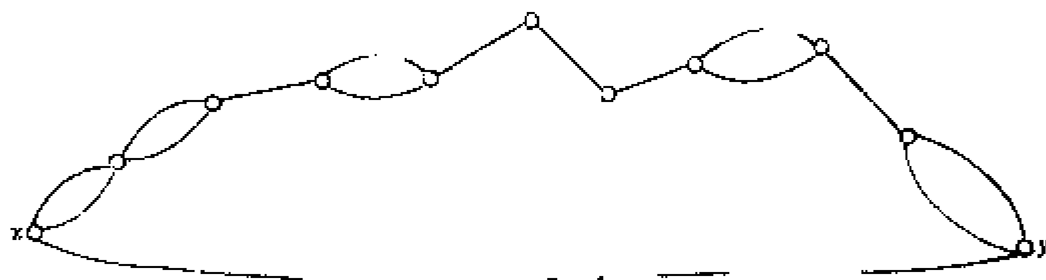


图 8.11

往证（i）⇒（ii）：

第一，图H是联接的，$bc(H)$是一棵树。

第二，x，$y\in H$，$G=H+xy$，则$G-x=H-x$。故若x是H的断点，x将是G的断点，这不可能。故x，y都不是H的断点。

第三，$bc(H)$是一棵树（实际是一个链），这个链有二端点，设C（H的一个集块）是其一个端点，链上的在C中的唯一的一个断点记为c，且若x与y没有一个是C的顶，则加进边xy将不是联接$C—c$的一个顶到$H—C$的一个顶的，故断点c将是原图G的一个断点，这是矛盾。

（证毕）

定理8.11 设图G是2—联的，$\alpha=xy$是图G的一条边，边α是关键性的，其充分和必要条件是：$G—\alpha$里无圈同时包含x与y，亦即α不是图G里某个初级圈的弦。故一个2—联图是极小2—联，当且仅当这个图上的圈不含弦。

证 充分性 若$G—\alpha$里无圈同时包含x与y，则$G-\alpha$不是

2 联的，故a是关键性的。

必要性 可自引理8.1导出。

（证毕）

推理8.11 设图G是2—联的，其阶$n\geqslant 4$，则G不含由关键性的边所构成的三角形。

证 设2—联图G含关键性的边构成的三角形xyz，命$u\in G-\{x, y, z\}$，由于G是2-联的，据推理8.5存在两条独立的链，自u联到$\{x, y, z\}$中的二点，譬如链$p_1[u, x]$，$p_2[u, y]$，且p_1与p_2是独立的，$z\notin p_1\cup p_2$，于是得初级圈$[up_1xzyp_2u]$。这个初级圈含弦xy。而xy是关键性的，这和定理8.11矛盾。

（证毕）

一个极小2—联图，其每一条边都是关键性的，因而有下：

推理8.11 极小2—联图G的任一2—联子图是极小2-联的。

证 设某个2—联子图不是极小的，则在这个子图里将出现一条边是某个初级圈的弦。回到原图，这些性质应仍存在，这和G的极小性相矛盾。

（证毕）

以下将往研究极小2—联图的结构。首先定义所谓二顶的**许可性**。已给图G的二顶，及联此二顶的任一链，在此链上，任二顶之间，如有联边，则此联边总在该链上，则此二顶称为是**许可的**。下定理描述一般极小2—联图的结构。

定理8.12 已给正整数$k\geqslant 1$，对每一个整数$i(0<i\leqslant k)$，命G_i是一条边$x_ix'_{i+1}$，或是一个极小2—联图，包含许可点对x_i与x'_{i+1}。命G是一个图，得自$\bigcup\limits_{1}^{k} G_i$，其中使$x_i$与$x'_i$重合（$1\leqslant i\leqslant k$）然后再联边$x_0x'_{k+1}$，则$G$是一个极小2—联图。

反过来，任何一个极小2－联图，都可以描述如上。

证 充分性 首先，这样构造出来的图G是2－联的。其次，G的每一边都不是初级圈的弦，故据定理**8.11**，图G是极小2－联的。

必要性 设G是极小2—联的，xy是其一边，则$H=G-xy$将如引理8.1所讲的那样，含集块$B_0, B_1, B_2, \cdots, B_k$（$k\geqslant 1$），其中$B_{i-1}$与$B_i$有一个公共顶$x_i$，$x\in B_0, y\in B_k$，且顶$x, x_1, x_2, \cdots, x_k, y$各不相同，图$H$含链〔$x, y$〕，仅有顶$x_i$与$x_{i+1}$在集块$B_i$内。据定理8.11，顶$x_i$与$x_{i+1}$是$B_i$内的许可点对，据推理8.11b，$B_i$或者是一条边（边$x_ix_{i+1}$）或者是一个极小2—联图。

（证毕）

定理8.12是很好的，具体给出了极小2—联图的整体结构。以下将进一步研究极小2—联图内部某些结构形式。

定理8.13 设G是一个极小2－联图，x，y是G的一对许可点，则每一条〔x, y〕链，都含G的2次顶。

证 设$p=$〔$x_0, x_1, \cdots, x_k$〕（$k\geqslant 2, x_0=x, x_k=y$）是一条$x$到$y$的链，不含$G$的2次顶。自图$G$舍去$p$上的边得图$H$，则$H$不含孤立点。由于$G$是2－联的，$H$的每个分子图，至少应含$p$的2点。否则，将有$\kappa_G(x, y)<2$，这不可能。又属于$H$的同一个分子图的2顶，在$p$上不能相邻。譬如$x_i$，$x_{i+1}$是$H$里同一个分子图的2顶，则自$x$到$y$可联一条链，自$x_i$经过那个分子图的其他顶点联到$x_{i+1}$，再联到$y$，于是边$x_ix_{i+1}$将不是这个链上的边，这和$xy$的许可性相矛盾。

设p_1是H的某个分子图里〔x_i-x_j〕链（$i<j$故$i\leqslant j-2$）并设$j-i$最小，故$V(p)\cap V(p_1)=\{x_i, x_j\}$，命$p_2$是图$H$的分子图$C(x_{i+1})$里〔$x_{i+1}-x_l$〕链，同样使$V(p)\cap V(p_2)=\{x_{i+1}, x_l\}$。$p_1$与$p_2$是点互质的，否则，在$H$里将存在链$p_3$，使$V(p)\cap V(p_3)=\{x,$

$x_{+.}$ }，这不可能。

图 8.12 （一）

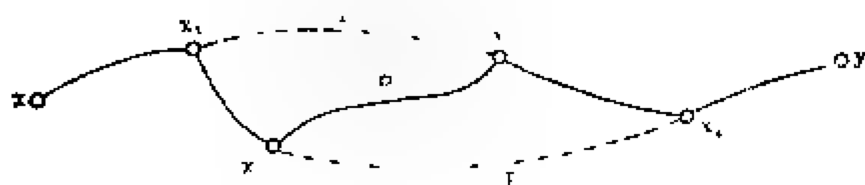


图 8.12 （二）

或者$l<i$（如图8.12（一））。此时图G里将有圈 $x_{.}px_{l}p_{.}x_{.}px_{i+1}l_{2}x_{l}$，这个圈取$xx_{+}$为弦，这是矛盾。或者$l>j$，则在图$G$里，有链$xpx_{l}p_{1}x_{j}px_{+1}p_{2}x_{l}py$（图8.12（二））不含边$x_{i}x_{i+1}$，这和$x$，$y$的许可性矛盾。链$p$上不含$G$的2次项导致矛盾，故定理得证。

（证毕）

定理8.14 设G是一个极小2 联图，但不是一个圈。则在G内，每一个圈上将至少包含二顶，其次数$\geqslant 3$，且此二顶在圈上被2次顶隔开。

证 设x、y是一条边，图G将呈下形（图8.13）：

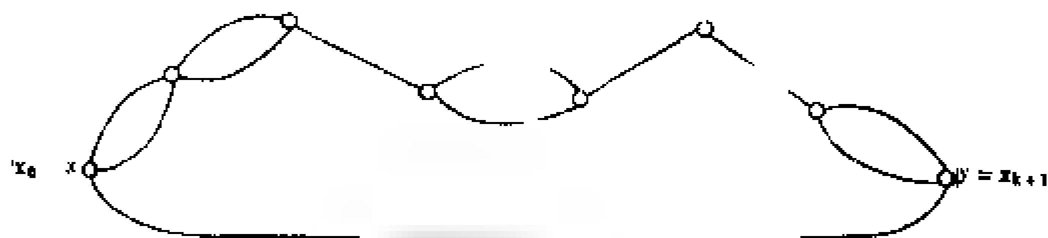


图 8.13

若C是图G的一个圈，包含顶点：

$x_0=x,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_i,\ x_{i+1},\cdots,\ x_k,\ x_{k+1}=y$。由于$G$本身不是圈，在$C$上至少将出现一对点$x_i$，$x_{i+1}$，此二顶之间，不是一条边，而是许可点对$x_i$与$x_{i+1}$之间的一条链。故$d_G(x_i)\geqslant 3$，$d_G(x_{i+1})\geqslant 3$，且链〔$x_i\cdots x_{i+1}$〕上至少有一2次顶。链〔$x_i\cdots x\cdots y,\ \cdots x_{i+1}$〕上也至少有一个2次顶。即在圈$C$上如定理8.14所云，至少有二顶，其次数$\geqslant 3$，且此二顶被2次顶所分隔。

定理8.15 设G是一个极小2—联图，但不是圈。命D是G的2次顶集。则$F=G-D$是一个林，至少具有二个分子图。子图G〔D〕的每一个分子图P是一条链，其两个端点，不联接林F的同一棵树。

证 1．G极小2—联，但不是圈。据定理8.14，G的每个圈上，次数$\geqslant 3$的顶总被2次顶所分隔。故$F=G-D$中不能再有圈，故F是林。

2．G〔D〕不能含圈，因这样的圈，也应是图G里的圈。据定理8.14，其上应有次数$\geqslant 3$的顶，G〔D〕是林，又不能含次数$\geqslant 3$的顶，故G〔D〕的每个分子图都应是链。

3．若G〔D〕里一条链的两个端点，联接林F里同一棵树，则G里将出现圈，其上次数$\geqslant 3$的顶将不被2次顶分隔，这和定理8.14矛盾。

（证毕）

下面两个定理，将给出极小2—联图里二次顶个数的一个下界，和所含边数的一个上界。

定理8.16 n阶的极小2—联图，至少含$(n+4)/3$个2次顶。对于$n\equiv -1,\ 0$（模3），这个结果是可能最好的。

证 1．设G是n阶的极小2—联图，而T是$F=G-D$的一个t阶的树，t个点，其次数$\geqslant 3$，全少其次数之和为$3t$，这个树共有$t-1$条边，故t个顶联到所有的二次顶的边，其条

数至少应为

$$3t-2(t-1)=t+2。$$

又F至少有三个分支圈。设F的阶是f，故至少应有$f+4$条边自F联到D故有

$$f+4=n-|D|+1\leqslant 2|D|$$

或 $$|D|\geqslant\frac{1}{3}(n+1),$$

或 $$|D|\geqslant\left[\frac{1}{3}(n+1)\right]^*。$$

2．命$n=3p-1\equiv-1$（模3），取$p-1$个顶，记为x_1，x_2，…，x_{p-1}，再取$p-1$个顶y_1，y_2，…，y_{p-1}，然后再取$p+1$个顶z_0，z_1，…，z_p，作图如次（见图8·14）：

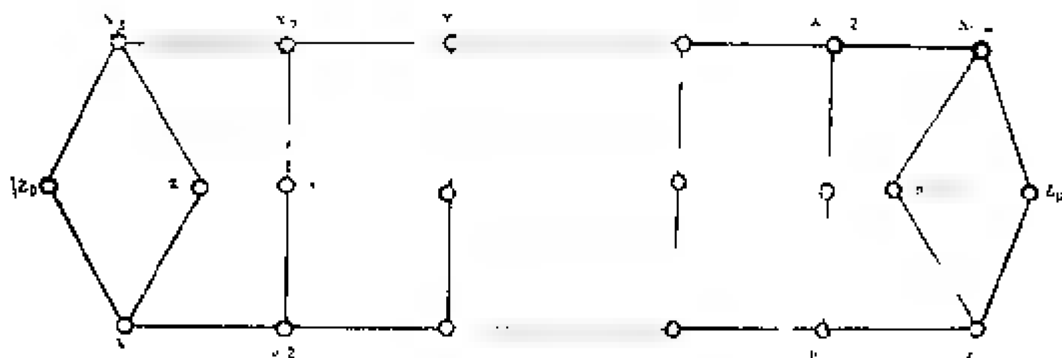


图 8·14

这个图是极小2—联的其阶$n=3p-1\equiv-1$（模3），3次顶的集合是$\{x_1, x_2, \cdots, x_{p-1}, y_1, y_2, \cdots, y_{p-1}\}$，2次顶的集合是$D=\{z_0, z_1, \cdots, z_p\}$于是

$$|D|=\left[\frac{1}{3}(n+1)\right]^*=p+1。$$

当$n=3p\equiv 0$（模3），同样取$p-1$个顶x_i与$p-1$个顶y_i，再取$p+2$个顶z_i，作图如下（见图8·15）：

这个图是极小2—联的，其阶$n=3p$，2次顶的个数是

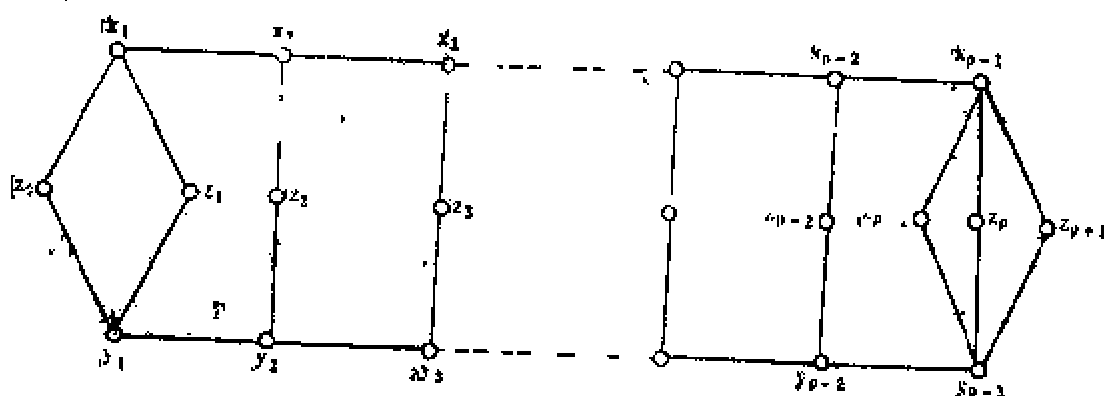


图 8·15

$|D|=[\frac{1}{3}(n+4)]^{*}=p+2$。　　　　（证毕）

定理8.17　阶$n\geqslant4$的极小2—联图，其边数$m\leqslant2n-4$，且两分图$K_{2,n-2}$是仅有的阶为n边数为$2n-4$的极小2—联图。

证　1．去掉2次顶，$F=G-D$至少是两棵树，阶为$n-|D|$，故

$$m\leqslant n-|D|-2+2|D|$$
$$\leqslant2n-(n-|D|+2)。$$

原图至少有两个顶，其次数$\geqslant3$，故

$$m\leqslant2n-4。$$

2．两分图$K_{2,n-2}$显是极小2—联的，它的边数是$2n-4$。

§6　3——联图的结构

本节将叙述3—联图的结构，这是Tutte教授所做的工作，读者可参看他的原文，Tutte, W. T. A Theory of 3—connected graphs, Indag. Math. 23(1961)441～455.

为此，先论述极小k—联图的某些性质。

引理8.2　设G是一个极小k—联图，xy是G的一边，S是一个$(k-1)$—集，在$H=G-xy$里分隔H。则$H-S$恰含两个分子图，其中一个包含x，一个包含y。

证　$H=G-xy$被S所分隔，$H-S$是不联接的。但由于

图G是极小k—联的，对$H-S$加进边xy，所得图是联接的。

（证毕）

引理8.3 一个k—联图G是极小k—联的，当且仅当对每一对邻点x、y有$\kappa(x,y)=k$。

证 于此先说明$\kappa(x,y)$的意义，设x、y是一对非邻点，在图中将x与y隔断的极小的点数称为x与y的**局部顶联接数**。若x与y相邻，则定义二者的局部顶联接数为$\kappa_H(x,y)+1$，其中$H=G-xy$。由此定义，显见

$$\kappa(G)=\min\{\kappa(x,y)\mid x,y\in G,\ x\neq y\}。$$

同理，可定义$\lambda(x,y)$，且也有

$$\lambda(G)=\min\{\lambda(x,y)\mid x,y\in G,\ x\neq y\}。$$

现在来证本引理。

充分性 设对任一对邻点，有$\kappa(xy)=k$，舍去边xy，在图$H=G-xy$里，$\kappa_H(x,y)=k-1$。$Gxy(=G-xy)$便已失去k—联性，故G是极小k—联的。

必要性 设G是极小k—联的，xy是其一边。舍去xy，图$H=G-xy$将能被$(k-1)$集隔断，在H内，最多只能有$k-1$条独立的链，联接x、y二点，故$\kappa_G(x,y)\leqslant k$。但$\kappa(G)=k$，故$\kappa_G(x,y)=k$。

（证毕）

当一个k—联图G的每一边，至少交于一个k次顶，这个图显是极小k—联的。因任意舍去一边，图里将出现顶，其次数是$k-1$，其最小次$\delta\leqslant k-1$，这样的图不能是k—联的，故原图G是极小k—联的，但反过来不一定正确。于此，有下述Halin定理①：

①读者可参看Halin的原文。

Halin, R. A theorem on n-connected graphs. J. Combinatorial Theory 7(1969)150～154

定理8.18 设G是一个极小k-联图，则$\delta(G)=k$。

证 这个定理的证明比较长，其思路是取各种k-集S，将G分隔成两部份C与D，$G=C\cup S\cup D$，$C\cap S=\phi$，$S\cap D=\phi$。命C为所有这样的分隔中维数最小的。往证将有$|C|=1$，即C只含一点x，而$|S|=k$，在G里存在$x-S$扇，故$d_G(x)=k$。但G是k-联的，应有$\delta(G)\geqslant k$，故$\delta(G)=k$。以下叙述本定理的证明：

设$G\neq K_{k+1}$，G是极小k-联的，其$\delta(G)=k$。
假定$|G|\geqslant k+2$，取k集S隔开G，命其中最小的分子图是C，其余的部份为D。设$|C|$最小，往证$|C|=1$，否则将出现矛盾。

1．设$|C|>1$，$x,y\in C(x\neq y)$，xy是C里一边，往证在$H=G-xy$里，必有扇$x-S$与扇$y-S$。

在H里存在$(k-1)$-集T'分隔x与y。

在G里存在$x-S$扇，自x到S有k条独立的链，由于D与C被S隔断，这些均在C内。

设在H里，不存在x—S扇，则必有链自x到S，中间经过y。在S中取$(k-1)$个点，命为T'，这$(k-1)$个点是在G里x—S扇中那些不过y的$(k-1)$个链的终点。x到S里第k个点的链都必过y。故T'在H里隔断x与y。命$T^*=T'\cup y$，$|T^*|=k$。用T^*代替S，隔断x与D，取在这种情况下的C为C'，于是$C'\subset C$，$C'\ni x$，$C'\not\ni y$，故$|C'|<|C|$。这和C的极小性相矛盾。

故在$H=G-xy$里存在x—S扇。同理，存在$y-S$扇。

2．设S分隔G成C与D，而C极小。

设$|T|=k-1$，T在$H=G_{xy}=G-xy$中分隔x与y，往证$V(D)\subset T$。设$V(D)\not\subset T$，将有点$z\in V(D)-T$，在G里有z—S扇（共k条独立的链）。T隔断x与y，但在H里有x—S扇与y—S扇，故共有k条独立的x到z的链，同样有k条独立的y

到z的链，故最终至少存在一条x到z，z到y的链，联接x与y，这是矛盾，故$V(D)\subset T$。

但$V(D)\cap S$ ϕ，$V(D)\cap V(C)$ ϕ，故如图8·17所示，$V(D)$在T的阴影部份内。

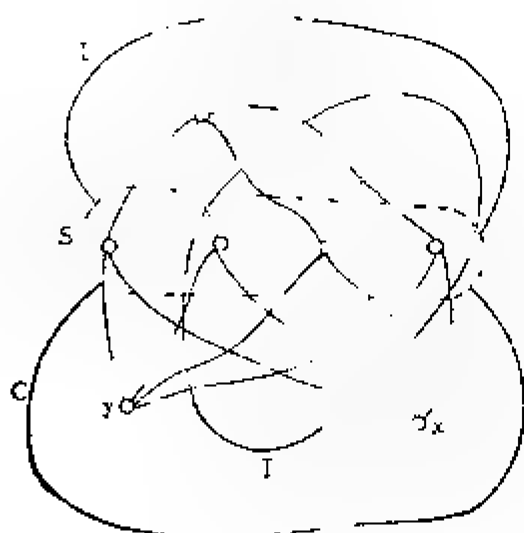


图 8 16

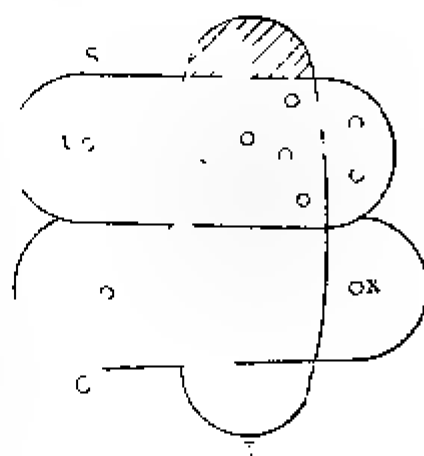


图 8 17

往证$|C|$ $|D|$而C不极小，导致矛盾。

设r $|S\cap T|$，

首先，因$V(D)\cap S$ ϕ，$|V(D)|\leqslant k-1-r<k-r$。

其次，命$u\in S-T$（因$|S|$ k，$|T|$ $k-1$）。

由于存在x—S扇与y—S扇，故存在x到u的初级链与y到u的初级链。而x与y被T所隔开，其中必有一个穿过T，即与T交于一点，这样的点应含在C内。

不在T里的$k-r$个S的点，分布在T的两侧。分布在一侧的点数$\geqslant\frac{1}{2}(k-r)$，故$T$里含在$C$中的点，其个数$\geqslant\frac{1}{2}(k-r)$。故$T$中的点，不含在$S$与$C$里的，其个数$\leqslant k-1-r-\frac{1}{2}\cdot(k-r)$ $\frac{1}{2}(k$ $r)$ 1。但C至少含有$\frac{1}{2}(k-r)+2$个点，因其中另含有x，y，显见

$|C|$ $|D|$，这是矛盾。（证毕）

以下将把上面研究的k—联图的性质，用到3—联图上来。

自一点O出发，向外发射出若干条边Ox_1，Ox_2，…，Ox_n成一棵树。再顺次联边x_1x_2，x_2x_3，…，$x_{n-1}x_n$，x_nx_1，这样的图称为**轮形图**，其阶是$n+1$。在$n\geqslant 3$时，轮形图总是极小3—联的。

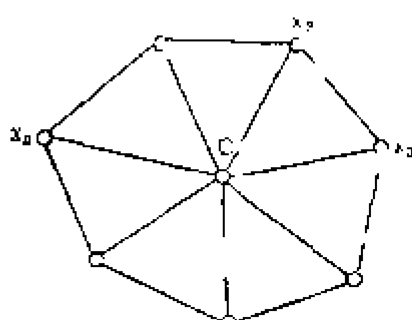


图 8 18

现在再来叙述有关图的两个运算，即所谓**拆点**与**凝缩**。所谓拆点，就是将图里一个次数不小于4的点x换成两个相邻的点x'，x''，而且把原来x的邻点都分别只与x'，x''中的一个点相联，使得x'与x''的次数都不小于3。其相反的运算是所谓凝缩，就是有边xy，将边xy去掉，将x，y合并成一点z，原先联到x与y的点，统统再到z联边。若边xy原在一个三角形上，凝缩xy之后，原图将失去二边。若边xy不在一个三角形上，则凝缩x，y之后原图只失去一边。凝缩边xy所得的图，记为G/xy。

一个轮形图，设其阶>4。将次数$\geqslant 4$的点拆开，得一新图，这个图仍是3—联的。

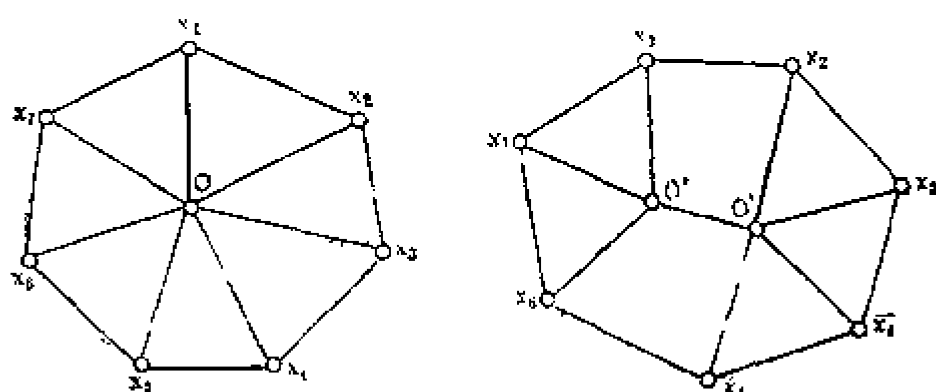


图 8 19

图8·19（一）是原图，（二）是将点O拆开成二点O'与O''所得的新图。原图是3-联的，新图仍是3-联的。

还有一种运算，叫做**加边**。在图上任意增加一边。譬如在轮形图上任意增加一边，所得的图当然仍是3-联的（有时由于加边，所得的图可能是4-联的等等，但仍可称这样的图是3-联的）。

设图G是3-联的，x与y不属于任何隔断G的3-集，则合并x与y不影响G的3-联性。因这样的合并，不影响所有的隔断3-集。

有了以上一些预备知识，便可陈述下面极为出色的

定理8.19 （Tutte〔1961〕）一个单纯图是3-联的，当且仅当这个图是一个轮形图，或是从一个轮形图，重复使用下二运算推得的图：

（1）加边，

（2）拆点。

证 定理的充分性是很显然的。以下往证定理的必要性，即往证一个3-联图，总可经加边与拆点的相反运算，最后推得一个轮形图。

1. 设图G极小3-联，而又不是一个轮形图，则在图G里总存在边xy，不含在一个三角形内，凝缩边xy，得图G/xy这个图仍是3-联的。

当$|G|=4$而G又是3-联的，G只能是K_4，这也是一个轮形图，故可假设$|G|>4$，以下用归纳证法。

据定理8.18，在G里存在顶x_0，其$d_G(x_0)=3$，设与x_0相邻的三顶是x_1，x_2，x_3，在$x_1x_2x_3$构成一个三角形，由于x_i等不是断点，故在$G-x_0-x_3$中，必有x_1到x_2的链，其长至少为2，否则，x_3将是一个断点，但在此时，除边x_1x_2外，再有三条相互独立的x_1到x_2的链，这和G的极小性相矛盾（因在此时，$\kappa(x_1x_2)=4$），由此知x_1，x_2，x_3三顶中，最多只能

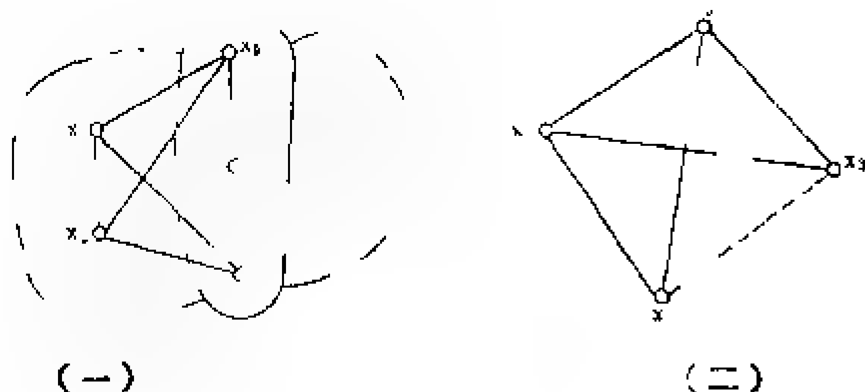
有一边相联，以下分三种情况进行研究。

（1）三项x_i没有二项相邻，此时可以假定在$G-x_0-x_3$中有一点y_2隔开x_1与x_2，否则x_0与x_3将不属于同一个隔开x_1与x_2的3一集，凝缩x_0x_3，得图G/x_0x_3是3一联的，于是据归纳法，定理便已成立。

现$G-x_0$是2一联的（由于今去x_i，x_ix_j(i，$j=1$，2，3，$i\neq j$)之间将失去一条独立链）在G中有三条独立的链联接y_2与x_3，故在$G-x_0$中将有圈包含三项x_i中的二项，而不含另一项，譬如不含x_i，于是G/x_0x_i将是3一联的，且x_0，x_i不含在一个三角形内。

（2）G恰含一边x_ix_j，譬如x_1x_2，此时G不能有隔开3一集含x_3与x_0，否则当$\{x_0, x_3, y\}$是这样一个隔开集时，$\{x_3, y\}$将也是G的一个隔开集，因x_1到y与x_2到y的链不得不属于$G-\{x_0, x_3, y\}$的同一个分子图，这是矛盾，于是G/x_0x_3是3一联的，且x_0x_3不是一个三角形的边，（见图8·20(一)。）

（3）G含两条x_ix_j边，譬如x_1x_2与x_1x_3，于是$G-x_0+x_2x_3$是3一联的，因在此时，x_ix_j上独立链的个数不因$-x_0+x_2x_3$而有所改变，其他各边都保持原有的形式，这个图$G-x_0+x_2x_3$或$G-x_0$将有一个是极小3一联的，命H记这个极小3一联图，若H是一个轮形图，可以考虑x_1，x_2，x_3的位



（一）　　（二）

图 8·20

置，直接验证定理，若H不是轮形图，则据归纳据设H将含一边yz，不含在一个三角形内，而H/yz是3一联的，于是在G内边yz也不含在一个三角形内而G/yz是3一联的。

2．定理必要性的证明：

第一步，舍去G的若干边，可得极小3一联图G_1，若G_1是一个轮形图，则定理已证，否则进行下一步，

第二步，设G_1不是轮形图，可将不在三角形上的边xy凝缩，因$d_{G_1}(x)\geqslant 3$，$d_{G_1}(y)\geqslant 3$，而xy又不在三角形上，故凝缩所得的点，其次数$\geqslant 4$，凝缩所得的图，仍是3一联的。减边，凝缩，继续进行，最后将得一个图G_2，G_2是3一联的，而又不能再减边和凝缩，它必是一个轮形图，于是倒转回去，便得

$$G_2 \Rightarrow (\text{加边与拆点}) \Rightarrow G。$$

（证毕）

关于图的联接性，本章就讲到这里为止，如读者有兴趣，可参看下书

Bela Bollobas，Extremal Graph Theory 的第一章以及那里所引的文献。

习　题

1．试证明：如果点x是图G的断点，则x不是其补图$\overline{G}$的断点。

2．试证明：点x是图G的一个断点，当且仅存在两点u，v，使x在每一条链$\mu(u,v)$上。

3．试证明：如果G是k边联的，$k>0$，E'是G的k条边组成的集合，则$G-E'$的联结分子图的个数不大于2。

4．试证明：如果H是G的子图，则不一定有$\kappa(H)\leq\kappa(G)$。

5．对$k>0$求出一个k一联图G及G的k个顶点的集合X'，使$G_{X-X'}$的联结分子图的个数大于2。

6．试证明：如果图G是k边联的，具n顶，m条边，则$m\geq\frac{kn}{2}$。

7，试证明：如果G是单纯图，具m边、n点，最小次数$\delta \geq n-2$，则$\kappa(G)=\delta(G)$。又：试构造一个$\delta(G)=n-3$且$\kappa(G)<\delta(G)$的单纯图G。

8，试证明：如果单纯图G的最小次数$\delta(G)\geq n/2$，n为其顶点数，则$\lambda(G)=\delta(G)$。又：试构造一个$\delta(G)=[(n/2)-1]$且$\lambda(G)<\delta(G)$的单纯图G。

9，试证明：如果G是单纯图，且$\delta(G)\geq\frac{(n+k-2)}{2}$，$n$为$G$所含之顶点数，则$G$是$k$联的。

10，试证明：如果G是单纯的3次正则图，则$\kappa(G)=\lambda(G)$。

11，试证明：如果图G无偶圈，则G的每一个集块或为一条边，或为奇圈。

12，试证明：如果图G是联接的，且不是一个集块，则G至少含有两个集块都恰好只含一个断点。

13，设图$G=(X, E)$的联结分子图个数为w，以$b(x)$表示含有点x的集块的个数。试证明：图G的集块个数$b(G)$等于：$w+\sum_{x\in X}(b(x)-1)$。

14，设在一个联结的图G中以$c(B)$表示集块B所含的G的断点个数，$c(G)$表示G中断点的个数，试证下式成立：$c(G)-1=\sum(c(B)-1)$。

15，举例说明，如果P是一条2联图中的$(x-y)$链，则未必存在一条与P点互质的$(x-y)$一链。

16，试证明：图G是一个集块，当且仅当其每两条边位于一个公共的初级余圈之中。

17，设$G=(X, E)$为2—联图，X_1，$X_2\subset X$，$X_1\cap X_2=\phi$且X_1与X_2均至少含2个顶点。试证明在图G中存在点互质的链P、Q使得：（1）P与Q的起点均在X_1中；（2）P与Q的终点都属于X_2；（3）P与Q的内部点均不属于$X_1\cup X_2$。

18，试证明：不存在仅具有7条边的3—联的图。

19，试由定义直接证明：k—联图也是k—边联的图。

20，试证明：图G是2—联的，当且仅当对任意三个点a、b、x，存在一个初级链$\mu(a, b)$，包含点x。

21，试构造一个具9个顶点，23条边的5—联的图，而且它不与$H_{5,9}$同构。

22，试对所有的$n\geq 5$，作出具n点，$m=2n-5$边，且其任二点间的距离不大于2的2联的图。

23，试证明：如果在图$G=(X, E)$中，对每一对不相邻的点x，y均有$d_G(x)+d_G(y)\geq n-1$，$n=|X|$，则$\lambda(G)=\delta(G)$。而且此结果在联结的图中是最好的，即不能把$(n-1)$换成$n-2$。

24，如果每个长为偶数的初级圈都至少含有2条弦，则每个长为偶数的初级

圈产生一个集团。试证明之。

25．如果每个长为偶数的圈至少含有2条弦，则一个长为奇数的初级圈，如果至少含有一条弦，则产生一个集团。试证明之。

26．如果每个初级偶圈至少含2条弦，试证明此时每个集块或者是一个集团，或者是一个没有弦的长为奇数的圈。

27．试证明：如果G是极小2一联的图，则：（1）如果$G\neq K_3$，则G不含三角形。（2）如果(x, y)是G的一条边，而z是$G-(x, y)$的断点，则z属于每一个含有边(x, y)的圈。

28．试证明：一个树T是某个图的集块断点图，当且仅当其任二端点之间的距离为偶数，亦即T是一个两分图（偶图）且其所有悬挂点属于同一类。

29．如果图G无孤立点，则其集块图$B(G)$与集块断点图$bc(G)$相互决定。试证明之。

30．试证明：图G是某个图H的集块图，当且仅当G的每个集块都是一个集团。

第九章　尤拉圈与哈密尔顿圈

§1 尤 拉 圈

在第一章我们曾经讲到七桥问题。大数学家尤拉为了解决这个问题，开创了图论的研究，在那里，我们曾经给出尤拉的定理：

"一个联接图，当其每个顶的次数是偶数时，存在一个圈过图的每个顶一次且仅一次。反之亦然"。

这样的圈称为**尤拉圈**。故在一个图上，存在尤拉圈的充分和必要条件为这个图是联接的且每个顶的次数是偶数。这个定理在本章重述如次：

定理9.1　设图$G=(X, E)$是联接的，则下述条件是等价的：

（1）　G是一个尤拉圈。

（2）　G的每一顶其次数是偶数。

（3）　G的边集可以分划成初级圈。

证　1. （1）⇒（2）. 设G是一个尤拉圈，当其过每一顶时，一进一出，而每一边又不许重复，故自一顶出发，最后再回到该顶时，用尽所有的边，过完所有的顶，每个顶上的边，必定是偶数个（当然，每个顶可能不止经过一次）。

2. （2）⇒（3）. 由于每个顶的次数是偶数，在G上可作初级圈C_1。若$C_1=G$，定理便已证。否则命$G_1=G-C_1$，由于C_1上每顶的次数是2，故图G_1每个顶的次数是偶数。同样图G_1里包含初级圈C_2，命$G_2=G_1-C_2$，…，继续这样做下去，最后将得一图G_l，其每个顶上的次数是0，故

$$G=C_1\cup C_2\cup\cdots\cup C_l。$$

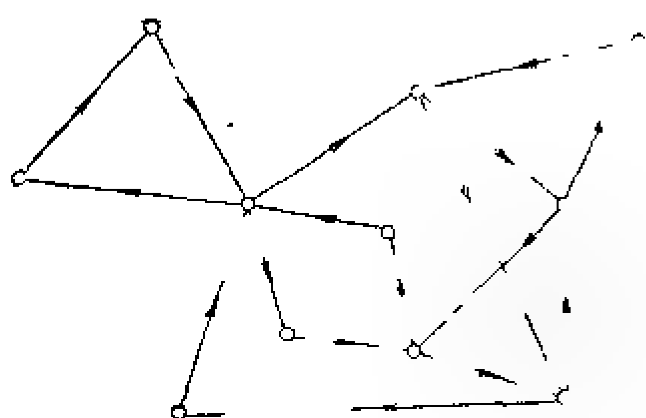


图 9.1

3.（3）⇒（1）。由于G是联接的，在G所划分的那些初级圈C中，必相互之间有顶相同。自图G的一个顶出发，每到一个共同顶处，可转向另一个初级圈，最后总可回到原出发点，经过每一边一次且仅一次，便得一个尤拉圈。

定理9.2 已给联接图$G=(X, E)$，设G只有两个奇次顶a和b，其他的顶都是偶次的，则G有一条开口的尤拉圈（称为**尤拉链**），自一个奇点出发，最终回到另一个奇点，经过每个顶（当然可能不只一次），且经过每条边一次且仅一次。

证 设a与b是图G的两个奇次顶，在图G上加一条边$[a,b]$而得图$G_1=G\cup[a, b]$，则G_1的顶都是偶次的，据定理9.1在图G_1里有尤拉圈，且此圈含边$[a, b]$。在此圈中再除去边$[a,b]$，便得一个开口的尤拉圈，经过图G的每条边一次且仅一次，自一个奇顶出发最后到另一个奇顶停止。

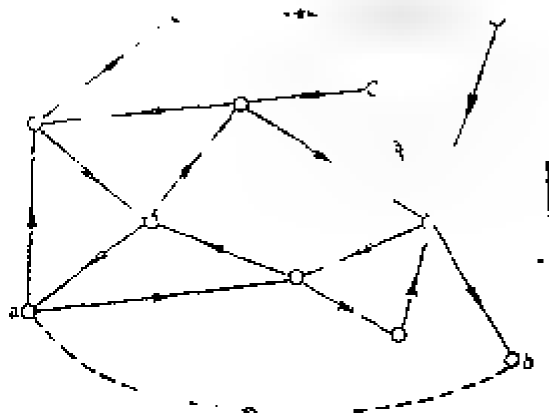


图 9.2

§2 哈密尔顿问题

设已给联接图$G=(X, E)$，所谓图G含一个哈密尔顿圈，它的意义就是可以在图上找到一个圈，自一个顶a出发，经过图G的每个顶一次且仅一次，最后再回到顶a。这个问题，起源于哈密尔顿，百多年来，经过很多数学家的研究取得了很

大成绩，引出很多问题，导致很多新的概念，得到很多有趣的结果，但那个最基本的问题：

"已给联接图G，G含哈密尔顿圈的充分和必要条件是什么？"至今没有找出来。这是图论里一个著名的未解决的问题，所谓**哈密尔顿圈问题**。

哈密尔顿圈，以下简记作H一圈，其他在以下将遇到的为**哈密尔顿链，哈密尔顿回路**等等，均如此简记为H—链，H—回路等。

H—问题起源于1856年，关于20点形上一个数学游戏的研究。在一个20点形上（如右图9.3）要求找到一条路，自一点出发，经过图的每个顶一次且仅一次，最后再回到原出发点，好像一个人要周游世界二十个城市，希望每个城市游到一次且仅一次，最后回到他原出发的城市。

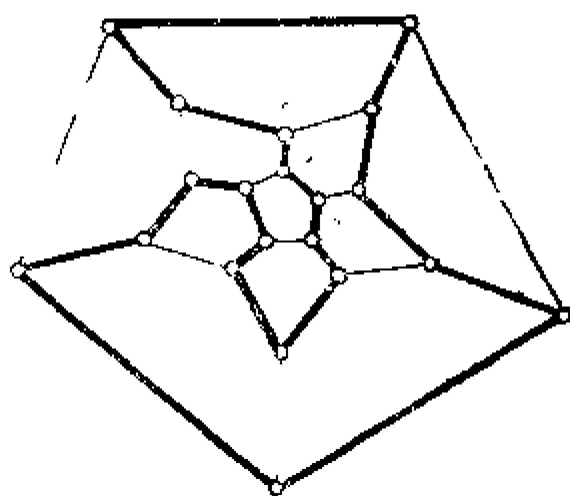
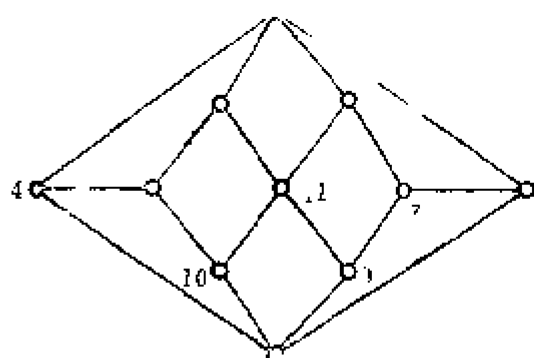
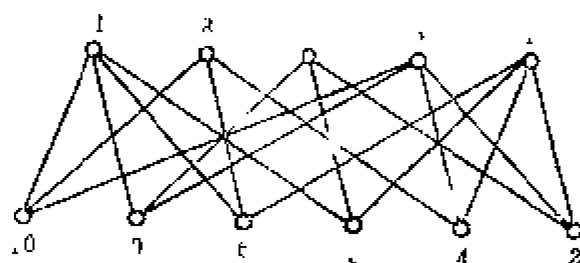


图 9.3

图9.3是有解的，而且有许多解（即可以找出很多条H—圈）。我们简称为H—型的图。又如下赫尔晒尔（Herschel）



（一）



（二）

图 9.4

图，则不是H型的。因为这个图实际上是一个两分图，共11个顶，一组5点，一组6点，在一个这样的两分图上不可能存在一个封闭的奇圈。

读者如果对这个问题感兴趣，可参看下列二书：

C. Berge: Graphs and Hypergraphs

及　　田丰：图论中的哈密尔顿问题。

前者总结了70年代前的主要成果，后者指出了研究这个问题的一些方向，并列出了大量参考文献。

§3　图成H——型的充分条件

虽然还没有找到一个充分而又必要的条件，但却发现了不少充分的条件，也发现了不少必要的条件。本节将陈述一些比较重要的充分条件。有了充分条件便可对某些图是H一型的加以肯定。以后再将陈述一些必要条件。有了必要条件，便可对某些图的非H-型性质也加以肯定。

以下假定图G是单纯的。

定理9.3　设单纯图$G=(X,E)$是n阶的，将其各顶按次数的大小排列成$d_1 \leqslant d_2 \leqslant \cdots \leqslant d_n$。设$q$是一个整数，

$0 \leqslant q \leqslant n-3$，若对每一个整数$k$：$q < k < \frac{1}{2}(n+q)$，

下关系成立

$$(A)\quad d_{k-q} \leqslant k \Rightarrow d_{n-k} \geqslant n-k+q,$$

则对每一个边集F，$F|$　q，且部份图(X, F)的联接分子图都是初级链，都存在G的一个H圈，包含F。

证　这个定理的证明比较长，以下分五个部份来进行。

1．首先证条件(A)导致$d_1 > q$。

设$d_1 > q$不成立，即设$d_1 \leqslant q$，并假定k　$q+1$，于是

$$q < k = \frac{q}{2} + \frac{q+2}{2} < \frac{q+n}{2},$$

由于$d_1 \leqslant q$，即$d_{k-q} \leqslant k$，故据条件（A），应有

$$d_{n-k} \geqslant d_{n-q-1} \geqslant n-q-1+q=n-1,$$

此式表示，第$n-q-1$个点到第n个点，它们的次数都不小于$n-1$，即至少应有$q+2$个顶，联到图的每一顶。故联到第一个顶的也至少应有$q+2$个顶，故应有$d_1 \geqslant q+2$，这是矛盾。

2．往证若图G满足条件（A），则向G任意增加一条新边所得的图G'仍满足条件（A）。

设 $$S_k=\{x/d_G(x) \leqslant k\},$$
$$S'_k=\{x/d_{G'}(x) \leqslant k\},$$

显见 $|S'_k| \leqslant |S_k|$（由于增加新边，顶的次数有所增加，这个关系式之能成立是很显然的）。

又可注意，条件（A）等价于

$$(A') \quad |S_k| \geqslant k-q \Rightarrow |S_{n-k+q-1}|<n-k,$$

因图G满足条件（A'），故

$$|S'_k| \geqslant k-q \Rightarrow |S_k| \geqslant k-q \Rightarrow |S_{n-k+q-1}|<n-k$$
$$\Rightarrow |S'_{n-k+q-1}|<n-k,$$

故 $$|S'_k| \geqslant k-q \Rightarrow |S'_{n-k+q-1}|<n-k,$$

即G'满足条件（A'），故G'满足条件（A）。

3．往证，设图G满足条件（A）而定理不成立，将导致矛盾。于此又分以下几个步骤：

（i）据第二步，将图G继续增加新边，导致一个所谓极大的图G，满足条件（A），而定理不成立。所谓极大，即若在图G上，任意再增加新边，所得图G'，便能使定理成立。由于极大图G，使定理不成立，即在图G里，不存在H—圈，包含已给的边集F。图G显然不是完全的。故在图G里，存在点对，互不相邻。设在这些点对中，选取点对$\{y_1, y_n\}$，使$d_G(y_1)+d_G(y_n)$达到极大，且取$d_G(y_1) \leqslant d_G(y_n)$。补充边$[y_1, y_n]$，命所得新图为$G'=G+[y_1 y_n]$，据上极大性，在图$G'$内存在$H$—圈，包含边集$F$，且包含新边

$\mu = [y_1 y_n]$，故在原图G内存在H一圈包含边集F，如下形式

$$\mu = [y_1 y_2, \cdots, y_n],$$

作集合

$$I = \{i / 1 \leqslant i \leqslant n-1,\ [y_1 y_{i+1}] \in E,\ [y_i y_{i+1}] \notin F\}。$$

首先，集合I是非空的。因$|F| = q$，故

$$(B)\quad |I| \geqslant d_G(y_1) - q \geqslant d_G - q > 0。$$

其次，必有

$$(C)\quad i \in I \Rightarrow [y_i, y_n] \notin E,$$

否则，圈$[y_1 y_2 \cdots y_i y_n y_{n-1} \cdots y_{i+1}, y_1]$，将是$G$里的$H$一圈，包含$F$（这里$i$若为1，条件显成立。又$i$必小于$n-1$，否则，由于$i \in I$,据定义将有$[y_1 y_n] \in E$，这是矛盾）。

（ii）设$k = d_G(y_1)$，待证

$$(D)\quad q < k < \frac{n+q}{2}。$$

由第一步知$d_G(x_1) > q$,故$d_G(y_1) \geqslant d_G(x_1) = d_1 > q$。

据（C）有

$$\Gamma(y_n) \subset \{X - y_n\} - \{y_i / i \in I\},$$

故 $d_G(y_n) \leqslant n - 1 - (d_G(y_1) - q)$，

因而下式成立：

$$(E)\quad d_G(y_1) + d_G(y_n) \leqslant n + q - 1,$$

但 $d_G(y_1) \leqslant d_G(y_n)$，若$d_G(y_1) \geqslant \frac{n+q}{2}$，

则 $$d_G(y_1) + d_G(y_n) \geqslant \frac{n+q}{2} + \frac{n-q}{2} = n+q。$$

这和（E）矛盾，故（D）成立。

（iii）待证定理如不成立，则导致矛盾。

据（C）知 $i\in I\Rightarrow[y_i\ y_n]\notin E$,

又据 $d_G(y_1)+d_G(y_n)$的极大性，有

$d_G(y_i)+d_G(y_n)\leqslant d_G(y_1)$
$+d_G(y_n)$ （$i\in I$）

故 $d_G(y_i)\leqslant k\quad d_G(y_1)$ （$i\in I$）

又因 $|I|\geqslant k-q$，故有$k-q$个点，其次数$\leqslant k$，故

$d_{k-q}\leqslant k$，

据原来的假设，此式导致

$d_{n-k}\geqslant n-k+q-k$。 （据（D））

故至少有$k+1$个点，其次数$\geqslant k$。由于$d(y_1)=k$，故其中至少有一点x不与y_1相邻，即下式成立：

$[y_1,\ x]\notin E$，

$d_G(x)\geqslant n-k+q\quad n\quad d_G(y_1)$。

因而 $n+q\leqslant d(x)+d(y_1)\leqslant d_G(y_1)$
$+d(y_n)\leqslant n+q-1$。 （E）

这是矛盾。

4．由此倒推，推到原来的图G，满足条件（A）的，必能满足定理的要求，即图G有H-圈，包含已给的边集F。

（证毕）

这个定理所列的条件，只是充分的。譬如上面所讲的那个20点形，是3次正规的平面图，含有H—圈。其各顶次数的排列是$3\leqslant3\leqslant3\leqslant\cdots\leqslant3$，若取$q=4$，$k=7$，则条件

$0\leqslant q\leqslant n-3$、$q<k<\frac{1}{2}(n+q)$是满足的，$d_{k-q}=3\leqslant7$，$d_{n-k}=d_{13}=3\leqslant17$，条件（A）不满足。但这个图确含$H$—圈。且若取$F=\{[ab],[bc],[cd],[de]\}$，确有$H$-圈，含此四边（见图9.3）。由此可见定理的条件（A）确实只是充分的，即满足这个条件的图，固然包含H-圈，可是不满足这个条件的图，未必不含H-圈。

虽然条件（A）只是充分的，但条件（A）是可能最好的。为了这个目的，可考察一个非减序列$d_1 \leqslant d_2 \leqslant \cdots \leqslant d_n$及一个整数$k$，使下三式成立：

$$
\begin{cases}
q < k < \dfrac{n+q}{2}, \\
d_{k-q} \leqslant k, \\
d_{n-k} \leqslant n-k+q-1。
\end{cases}
$$

数列（d_i）被数列（d_i'）所统帅（即$d_i' \geqslant d_i$对一切$1 \leqslant i \leqslant n$均成立），其中

$$
d_i' = \begin{cases}
k & \text{当}\ 0 < i \leqslant k-q, \\
n-k+q-1 & \text{当}\ k-q < i \leqslant n-k, \\
n-1 & \text{当}\ n-k < i \leqslant n。
\end{cases}
$$

现在可以证明确实存在图G'，取d_i'为其次数序列。命图G'的顶集，是三个互质的点集A，B，C之合，其中A是$k-q$个孤立点集$\overline{K}_{k-q}$，B是集团K_k的顶集，C是集团K_{n-2k+q}的顶集。将B的每个顶联到$A \cup C$的每个顶，得图G'，其阶是n，其各顶的次数确是d_i'：

$$
\begin{cases}
d_{G'}(a) = k & \text{当}\ a \in A, \\
d_{G'}(b) = n-1 & \text{当}\ b \in B, \\
d_{G'}(c) = n-k+q-1 & \text{当}\ c \in C。
\end{cases}
$$

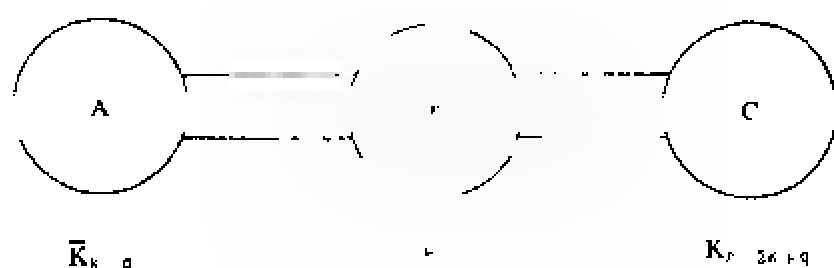


图 9.5 （一）

图G'称为原图G的统帅图，当$q=0$时，这个图G'记作$C_{k,n}$。

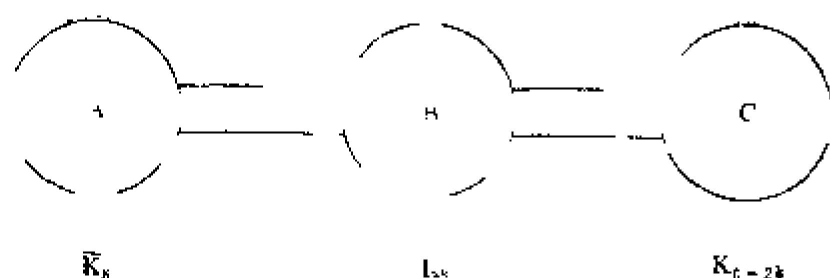


图 9.5（ ）

对所有满足条件 $0<q<k<\frac{n+q}{2}$ 的一切q与k，取(d_i')为次数数列的图G'确实存在。但图G'确不含H—圈，包含边集F（$|F|=q$）。设在B里取边集F（$|F|=q$），F构成一个初级链，其长为q，设在G'里有H-圈μ包含F。在μ所成的序列中，最多有B的$k-q$个元素，后跟$A\cup C$的一个元素。由于$|A|=k-q$，恰有B的$k-q$个元素，后跟A的一个元素，于是将没有B的元素，后跟C的一个元素。但这是不可能的，因

$|C|=n-2k+q>0$。

从定理 9.3 可以推出许多充分性的定理，这里举出几个形式比较简单的如下：

定理9.4 （Chvàtal［1971］）已给单纯联接图G，其阶$n\geqslant3$，将其顶编号，使各顶的次数成数列$d_1\leqslant d_2\leqslant\cdots\leqslant d_n$，若$d_k\leqslant k<n/2\Rightarrow d_{n-k}\geqslant n-k$，则在图$G$内，存在$H$—圈。

证 在定理9.3里取$q=0$，便得这个定理。

（证毕）

这个定理，可以用来肯定一个单纯图G，是否确含H—圈。和定理9.3一样，定理的条件是可能最好的。定理9.4可以改写如次：

定理9.4′ 设单纯联接图$G=(X,E)$的阶$n\geqslant3$，将其顶按次数的递升序列编号：$d_1\leqslant d_2\leqslant\cdots\leqslant d_n$，设不存在$k<\frac{n}{2}$，

使$d_k \leqslant k$与$d_{n-k} < n-k$同时成立，则图G是H型的。

推理9.4' 设在G内，根本不存在$k<\frac{n}{2}$，使$d_k<k$，则G是H—型的。

定理9.5 设图$G=(X,E)$是单纯的，$|X|=n$，$|E|=m$。若$m\geqslant\binom{n-1}{2}+1$，则图$G$含$H$—圈，且$n$阶，具$\binom{n-1}{2}+1$条边的非$H$-型单纯图，仅有$C_{1,n}$与$n=5$时的$C_{2,5}$，其中$C_{k,n}$是所谓的**统帅图**。

证 设单纯图$G=(X,E)$的阶$n\geqslant 3$，但不是H—型的。定理9.4的条件必不满足，即至少存在一个数k：$0<k<\frac{n}{2}$，使$d_k\leqslant k<\frac{n}{2}$与$d_{n-k}<n-k$同时成立。但图$G$被图$C_{k,n}$所统帅，故

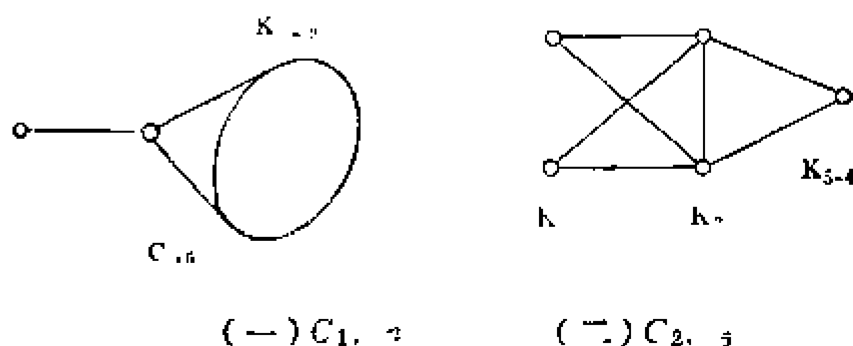
$$
\begin{aligned}
m(G)\leqslant m(C_{k,n})&=\frac{1}{2}\{k^2+(n-2k)(n-k-1)+k(n-1)\}\\
&=\binom{n-1}{2}+1-\frac{1}{2}(k-1)(k-2)\\
&\quad-(k-1)(n-2k-1)\leqslant\binom{n-1}{2}+1。
\end{aligned}
$$

这和定理的假设矛盾，故图G是H—型的。

在上不等式中$m(G)=m(C_{k,n})$的唯一可能性是图G与$C_{k,n}$有相同的次数序列。而$m(G)=\binom{n-1}{2}+1$仅有的可能性是$k=1$，或$k=2$与$n=5$。亦即n阶单纯图G，其边数是$m=\binom{n-1}{2}+1$而又不是H—型的只有两种可能性，一种是$C_{1,n}$，一种是$C_{2,5}$。

定理9.6 （Dirac 1952）联接的单纯图$G=(X,E)$的

阶$n\geqslant3$，且其极小次数$\delta\geqslant n/2$，则G是H型的。



（一）$C_{1,}$　　（二）$C_{2,}$

图 9 6

证　由定理9.4′可以推得本定理，因在此时，不存在$k<\frac{n}{2}$

使$d_k\leqslant k$，当然也就不存在$k<\frac{n}{2}$，使

$d_k\leqslant k$与$d_{n-k}<n-k$，同时成立。

但本定理也可以直接证明如次：

设定理不成立，命G是具备定理条件，而定理不成立的极大图。

由于$n\geqslant3$，$\delta\geqslant\frac{n}{2}$，而$G$又不是$H$—型的，故$G$是不完全的。在$G$中必存在非邻点对$u$，$v$，使$G'=G+[u,v]$是$H$-型的，但$G$本身不是$H$-型的。故$G'$所含的$H$—圈，必含边$[u,v]$，故在图$G$内存在一条$H$—链$\mu$，起于$u$而终于$v$：

$$\mu=[v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n],$$

其中$v_1=u$，$v_n=v$。

命　$S=\{v_i/[u,v_{i+1}]\in E\}$，$T=\{v_i/v_iv\in E\}$，

显见$v_n\notin S\cup T$，故$|S\cup T|<n$，

又　$S\cap T=\varnothing$，因若$v_i\in S\cap T$则$v_i\neq v_1$，因而

$$[v_1, v_2, \cdots, v_i v_n v_{n-1}, \cdots, v_{i+1} v_1]$$

将是G里一个H—圈，这是矛盾，故

$$d_G(u)+d_G(v)<n$$

这是矛盾。因$d_G(u)\geqslant\delta$，$d_G(u)\geqslant\delta$而$\delta\geqslant\frac{n}{2}$。

（证毕）

定理9.7 （Ore〔1961〕）设联接的单纯图$G=(X, E)$的阶$n\geqslant3$，且$d_G(x)+d_G(y)<n\Rightarrow[xy]\in E$，则$G$是$H$一型的。

证 取$k<\frac{n}{2}$，首先往证集合

$$S_k=\{x/x\in X, d_G(x)\leqslant k\}$$

的维$<k$。

（i）S_k成一集团。因S_k中任二点，其次数之和都小于n，即其中任二点都相邻。

（ii）$|S_k|\leqslant k+1$。因S_k是一个集团，而其中任一点的次数又都不超过k，故S_k最多只能包含$k+1$个点。

（iii）$|S_k|\neq k+1$，否则S_k中任一点x便不能与$X-S_k$中任一点y相邻（因$d_G(x)\leqslant k$），于是

$$d_G(y)\leqslant n-1-(k+1),$$

$$d_G(x)+d_G(y)\leqslant k+n-k-2=n-2<n,$$

据定理的假设，x与y应相邻，这是矛盾。

（iv）$|S_k|\neq k$。否则S_k中任一点x最多只能与$X-S_k$中一个点相联，故自S_k外联的边数

$$m_G(S_k, X-S_k)\leqslant k<\frac{n}{2},$$

但$|S_k|=k<\frac{n}{2}$，故$X-S_k$中的点，至少将有一点y，不与S_k中的任何点相邻。在S_k中任取点x，将有

$$d_G(x)+d_G(y)\leqslant k+(n-k+1)=n-1<n$$。据定理的假设，x应与y相邻，这是矛盾。

故 $|S_k|<k$。

其次将G的顶点，按次数的递升顺序编号，便有

$$d_k>k,$$

对于任取的$k<\frac{n}{2}$，根本不存在$d_k\leqslant k$，故根本不存在$k<\frac{n}{2}$使

$$d_k\leqslant k<\frac{n}{2} 与 d_{n-k}<n-k$$，同时为真，据定理9.4′，G是H—型的。

根据以上的讨论，便可对阶$n\geqslant3$的联接单纯图$G=(X,E)$，就其不相邻点次数之和，做进一步研究。于此，有下

定理9.8 设联接的单纯图$G=(X,E)$，其阶$n\geqslant3$。u,v是任一对不相邻点，其次数之和

$$d_G(u)+d_G(v)\geqslant n。$$

联接u，v，得图

$$G'=G+[u,v]，$$

则G是H—型的，其充分和必要条件是G'为H—型的。

证 必要性 是很明显的。因若G是H—型的，增加一条新边，当然还是H—型的。

充分性 设G'是H—型的，而G不是。则据定理9.6的证明，可推得

$$d_G(u)+d_G(v)<n,$$

这是矛盾。

（证毕）

根据这个定理，任给一个联接的单纯图$G=(X,E)$可连续将其不相邻的点对，其次数之和$\geqslant n$的，联边，看所得新图，是否为H—型的，因联边的顺序不同，最后所得的结果，是否一致，尚须研究，故首先须证下定理能成立：

定理9.9 设用不同的顺序，循环联接次数之和不小于n的

点对，所得结果是唯一的。

证 所谓循环联边，即是找到原图G的一对不相邻点u,v，其次数之和不小于n的，便将u，v联边，得新图G'，在G'中再找不相邻点对，其次数之和不小于n的，再联边。如此继续联边。在原图中，由于如此联边，原来不相邻的点对，其次数之和小于n的，到相当时候，由于其次数的逐渐增大，便也可以联边，这就是所谓循环联边。

设用一种方法，联到最后，不能再联边，命所得结果为G_1。设用另一种顺序，最后联得的图为G_2。往证$G_1 \cong G_2$。

设 $G_1 = G + \{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$，$G_2 = G + \{f_1, f_2, \cdots, f_l\}$，若$G_1 \neq G_2$，则$G_1$中的新边，自然会有不含在$G_2$里的。命$e_{k+1} = [u,v]$是$e_i$中第一个不是$G_2$的一边。设

$$H = G + \{e_1, e_2, \cdots, e_k\},$$

据定义，知 $d_H(u) + d_H(v) \geq n$，

由于e_{k+1}是第一个不属于G_2的边，故$H \subset G_2$，因而

$$d_{G_2}(u) + d_{G_2}(v) \geq n,$$

这是矛盾。因据假设$e_{k+1} = [u,v] \notin G_2$。

于是所有的e_i都属于G_2。同理所有的f_j属于G_1。亦即$G_1 \cong G_2$。

（证毕）

这个唯一的结果，称为图G的**闭包**记作$\overset{\frown}{G}$。

据定理9.8，乃得下

定理9.10 单纯联接图$G = (X,E)$是H—型的，当且仅当其闭包图$\overset{\frown}{G}$是H—型的。

证 由闭包图$\overset{\frown}{G}$逐步向上倒推，据定理9.8乃得本定理。

（证毕）

我们知道，任一完全图总是H—型的，故任给单纯联接图G，可用上法求出其闭包图$\overset{\frown}{G}$。若$\overset{\frown}{G}$是完全的，便可判定原图G是H—型的。此即下

推理9.10a 如G是完全的，则G是H—型的。

实际上，定理9.7是这个推理的一个直接推理。由于$d_G(u)+d_G(v)\geq n\Rightarrow[u,v]\in E$，故在$G$里，任一对不相邻点$u'$与$v'$，其次数之和，必满足

$$d_G(u')+d_G(v')\geq n。$$

据闭包图$\overleftarrow{G}$的作法，将一切不相邻的点对联边，总得一个完全图，故G是H—型的。

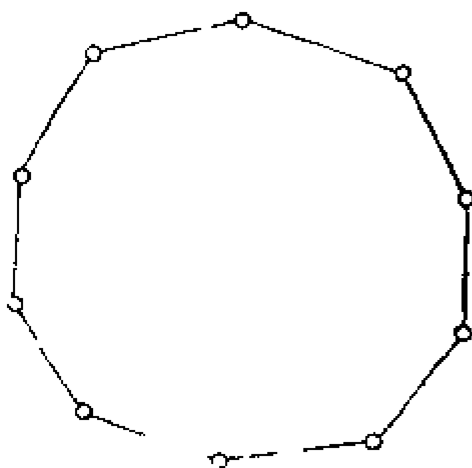


图 9.7

又可注意：长为10的初级圈是H—型的，$\frac{n}{2}=5$。这个图不满足定理9.7的条件，也不可能采用联边的办法来证明它是H—型的。由此可知定理9.7与定理9.10都只是充分的。

§4 圈成H——型的必要条件

定理9.11 设联接的、单纯图G是H—型的，则G是2—联的。

证 这是很明显的，若图G有H—圈，其每一对点上至少有二点互质的链，故这个图是2—联的。（证毕）

这个条件，当然只是必要的。譬如$K_{2,n}$，当$n\geq3$时，总是2—联的。可是这个图不是H—型的。

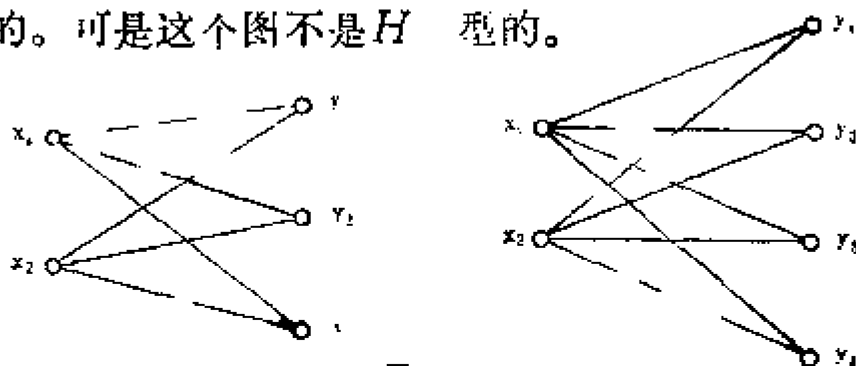


图 9.8

例如图9.8(一)，$n=3$，是个奇数。$K_{2,3}$共有奇数个点。在两分图，当然不可能存在奇圈。又如图9.8(二)虽然包含偶数个顶，但任何圈，包含所有的顶，必在x_1与x_2上重复，这样的圈，当然不是H—圈。

已给图$G=(X,E)$，命$S\subset X$，是图里任一顶集。$G-S$可能分成若干个联接的分子图，用$k(G-S)$表示这个数，则下定理成立：

定理9.12 设单纯联接图$G=(X,E)$是H—型的，则对于每一个X的真子集S，恒有

$$k(G-S)\leqslant |S|。$$

证 设C是G的一个H—圈，对于每一个非空真子集$S\subset X$，恒有

$$k(C-S)<|S|。$$

但$C-S$是$G-S$的一个跨顶的子图，故

$$k(G-S)\leqslant k(C-S),$$

因而恒有

$$k(G-S)\leqslant |S|。$$

（证毕）

这个定理的条件只是必要的。譬如柏特森(Peterson)图是3—联的。当$|S|=1$或2恒有$k(G-S)=1$，当$|S|=3$，$k(G-S)$的极大值是2。当$|S|=4$，$k(G-S)$的极大值是3等等。但已知柏特森图是非H—型的（Chvatalv，〔1973〕，实际上，在这个图里，任意去掉一点，所得的图是H—型的。

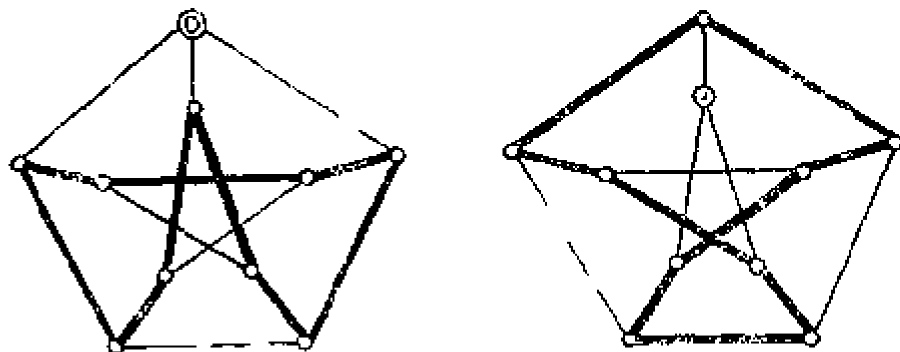
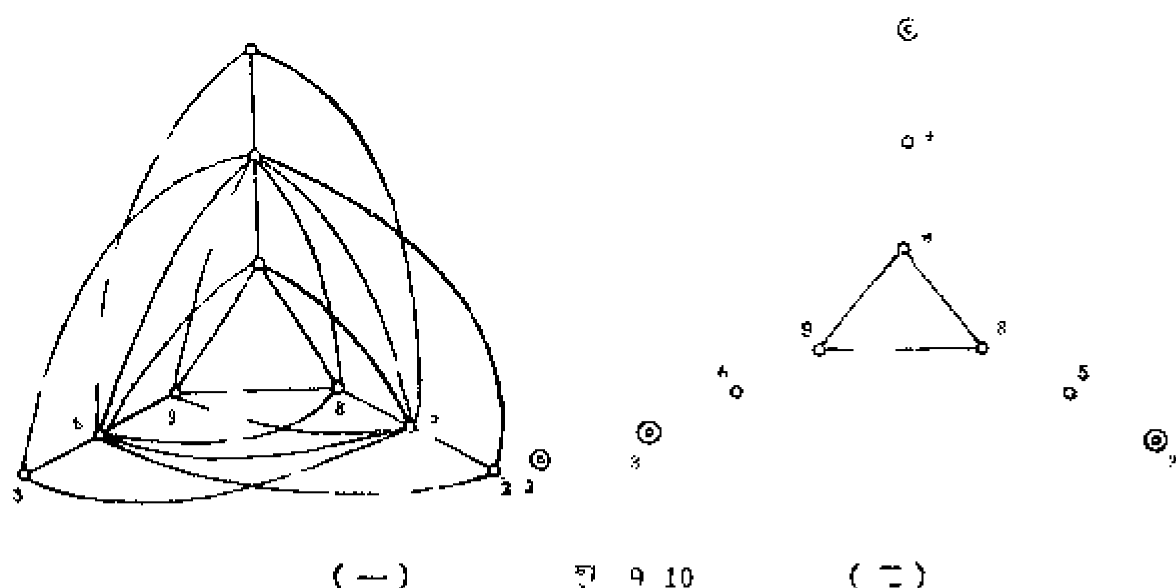


图 9.9

又关于这个定理，有一个很有趣的例。比如下图（图9.10）



（一）　　图9.10　　（二）

取$S=\{4、5、6\}$，$k(G-S)=4$，故原图是非H—型的。但若在(一)里，将边[14]改成[17]，则所得的图便是H—型的。由于将[14]改成[17]之后，$d_G(1)+d_G(4)=10>9$，便可联边[14]。如此，便可循环联边最后得一完全图。据推理9.10a，知原图是H—型的（请读者作出该图）。

现在再来叙述一个关于平面图是H—型的必要定理。为此先说明几个概念。在一个平面图里，我们已经知道，这个平面图包含很多个面，包围每个面的边数，称为这个面的**级**。设一个平面图$G=(X,E)$含有一个H—圈C。我们知道：第一，这个圈C过每个顶一次且仅一次。第二，由于图是平面的，这个圈C将整个平面，分成二部份，把一个部份，叫做**内部**，一个部份便可叫做**外部**。第三，不管是内部还是外部，其不在圈C上的边，相互之间，或和C上的某些边构成图的面。命内部所含的i级的面的个数为φ'_i，外部所含的i级的面的个数为φ''。则下定理成立：

定理9.13 （Grinberg[1968]）设单纯联接图$G=(X,E)$是平面的，并设图G有H—圈C，则

$$(A) \qquad \sum_{i=1}^{n}(i-2)(\varphi_i' - \varphi_i'') = 0,$$

其中φ_i'与φ_i''分别是H-圈C内部与外部所含i级面的个数。

证 设$E(G)-E(C)$是不在H-圈C上的边。命E'为含在C内的边集，$|E'|=n'$，则C内含$n'+1$个面，故

$$\sum_{i=1}^{n}\varphi_i' = n'+1,$$

但E'中的每条边恰含在两个面的边界上，而C上的边，则每一边恰只含在一个面的边界上（见图9.11）。图G共有n个顶，圈C上共有n条边，故

$$\sum_{i=1}^{n} i\varphi_i' = 2n'+n,$$

自上二式消去n'，有

$$\sum_{i=1}^{n}(i-2)\varphi_i' = n-2。$$

同理考察圈C外的面有

$$\sum_{i=1}^{n}(i-2)\varphi_i'' = n-2,$$

二者相减，乃有

$$\sum_{i=1}^{n}(i-2)(\varphi_i' - \varphi_i'') = 0。$$

（证毕）

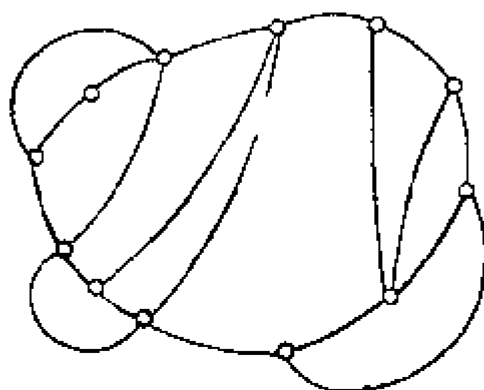


图 9.11

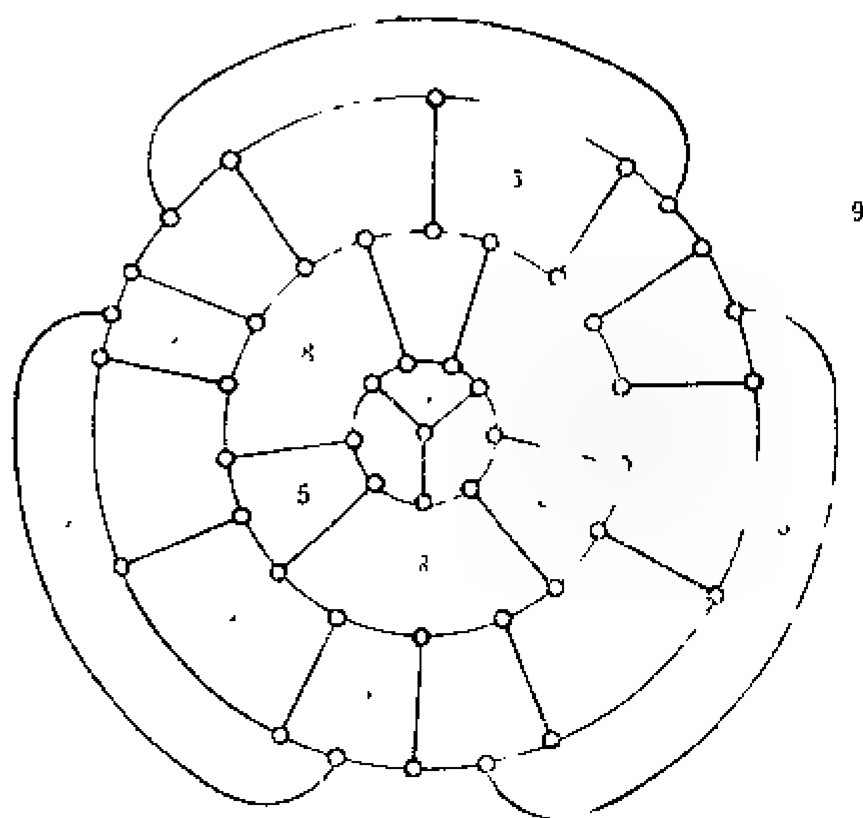


图 9.12

例1　Grinberg图9.12不是H-型的。

解　这个图（图9.12）仅含5级、8级及9级的面，代入(A)将有

$$3\cdot(\varphi_5'-\varphi_5'')+6\cdot(\varphi_8'-\varphi_8'')+7\cdot(\varphi_9'-\varphi_9'')=0,$$

故　$$7\cdot(\varphi_9'-\varphi_9'')\equiv 0 \quad (\text{模}3)$$

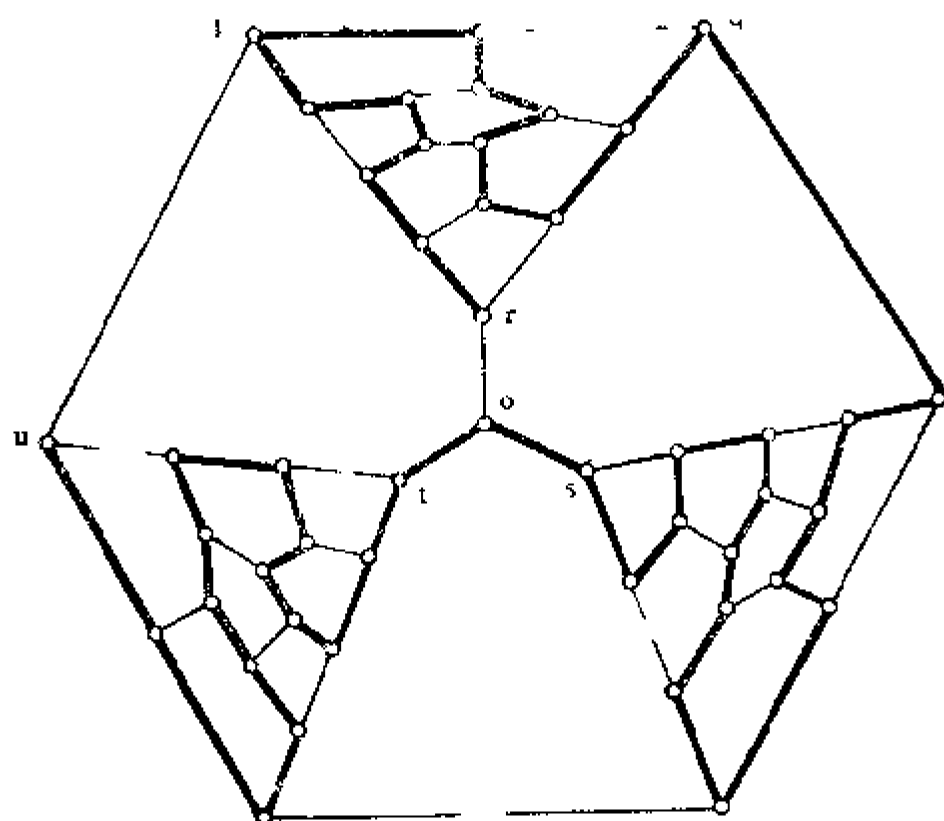
图中只有一个9级的面。若这个面含在H-圈之内，则上式左端是7，若这个面含在H—圈之外，则上式左端是-7。无论那种情况皆不可能，有

$$7(\varphi_9'-\varphi_9'')\not\equiv 0 \quad (\text{模}3)$$

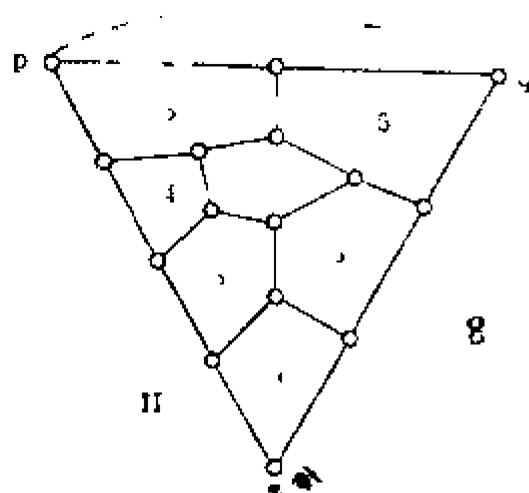
故这个Grinberg图是非H—型的。

3次正规平面图不是H—型的。还可以举Tutte图为例。

例2　Tutte图（图9.13）不是H—型的。



(一)



(二)

图 9.13

假使Tutte图（图9.13）有H—圈C，这个C应过顶O。在顶O上有3边，设圈C含Os与Ot，C就不能再含边Or。那么这个圈C进入部份图pqr时，必自p（或q）进，经过部份图pqr的各点，再自q（或p）出。因此，如补作$[p,q]$边，这个新图将是H—型的（见图9.13(二)），命之为H。将定理9.13应

用到H上，应有

$(\varphi_3'-\varphi_3'')+2(\varphi_4'-\varphi_4'')+3(\varphi_5'-\varphi_5'')+6(\varphi_8'-\varphi_8'')=0$，由于图$H$的$H$—圈$C'$包含边$[p,q]$，含3边的面与含8边的面以$[p,q]$为公共边，故必一在$C'$的内域，一在$C'$的外域。上式便转化成

$$2(\varphi_4'-\varphi_4'')+3(\varphi_5'-\varphi_5'')=5,$$

在H中含4边的面有两个，以r为顶的那个4边的面，应含在C'的内域（因上面假定含8边的那个面在C'的外域）。故当图H里另一个4边的面，含在C'的内域或外域时相应有$\varphi_4'-\varphi_4''=2$或0，故相应得

$$3(\varphi_5'-\varphi_5'')=0 \quad 或 \quad 3(\varphi_5'-\varphi_5'')=5,$$

但此二式均不能成立，遂得矛盾。故Tutte图是另一个3次正规非H—型的平面图。实际上，Tutte图有H—链取r与u为起迄点。关于H—链的问题，将在§6里专门加以研究。

Grinberg图与Tutte图都含46点。利用定理9.13也可以证明赫尔晒尔(Herschel)图不是H—型的，这是一个最小的非H—型的3—联平面图。因这个图共含9个4边的面，据定理9.13若这个图含H—圈，下式必成立：

$$2(\varphi_4'-\varphi_4'')=0$$

因总共有9个四边的面，这式不可能成立。

§5 有向图的哈密尔顿回路

在前两节，我们研究了无向图$G=(X,E)$上哈密尔顿圈存在的充分条件和必要条件。本节将专门研究在有向图上的哈密尔顿问题。这里假定图$G=(X,\Gamma)$①是有向的1—图。所谓**哈密尔顿回路**，是一条回路，自图的一点出发，沿弧的正向，经过每个顶一次且仅一次，再回到原出发点。哈密尔顿回路，以

① 在有向1—图$G=(X,U)$中，如果弧$(x,y)\in U$，则称y是x的后继，记为$y\in\Gamma_G(x)$。显然G完全被函数$\Gamma=\Gamma_G$所决定。因而G又可记为(X,Γ)。

下简记为H—回路。

当然，一个无向图$G=(X,E)$，可能有H-圈。但当将其边给以定向变为有向1-图，$G=(X,\Gamma)$，这个有向图，是不一定有H-回路的。例如下图9.14(一)与(二)、(三)便是这样的情况：

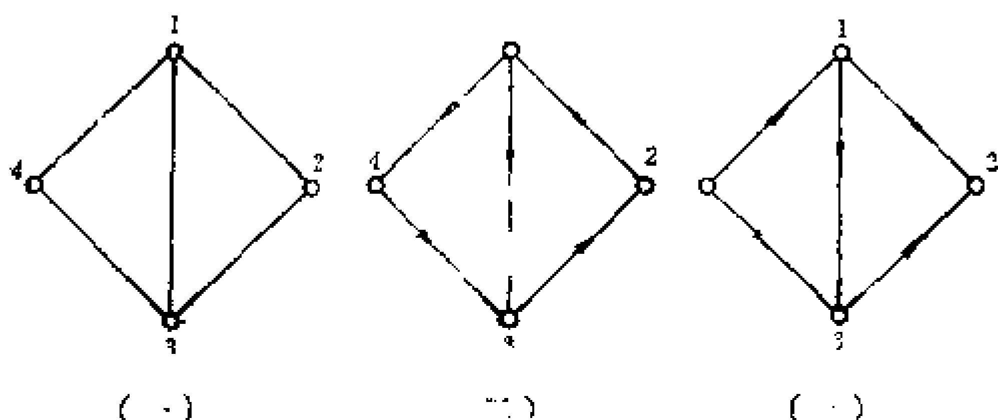


图 9.14

图9.14(一)有H—圈，(二)是强联的①，有H—回路，(三)则无H-回路。

定理9.14 (Ghouila Houri,〔1960〕)设无环图$G=(X,\Gamma)$是一个阶$n\geqslant 3$的强联1-图。若在每个顶上，有

$$d_G^+(x)+d_G^-(x)\geqslant n,$$

则G有H-回路。

证 用反证法。设这个定理对于一切阶$<n$的图均成立，但对某个阶n的1—图$G(X,\Gamma)$定理不成立。往证将导致矛盾。

据假设 $|\Gamma_G^+(x)|+|\Gamma_G^-(x)|-|X|\geqslant 0$ (i)

命 $\mu=[x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{l-1},x_0]$是图$G$的一个具极大长度$l$的有向初级圈。因$G$是强联的，故$l\geqslant 2$，又因$G$无$H$—回路，$l<n$

命 $X_0=\{x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{l-1}\}$，

设$G-X_0$的强联分子图是$X_1,X_2,\cdots,X_p$（强联分子图，是用等价关系来定义的）。

① 在有向图中，如对其中任二点x，y($x\neq y$)，总存在自x走向y的一条路，则该图称为强联的。

1．往证每个子图G_{X_1}，G_{X_2}，…，G_{X_p}均含一个H回路，

设 $x\in X_i\ (1\leqslant i\leqslant p)$，则对任 $k<l$，有

$$x_k\in\Gamma_G^-(x)\Rightarrow x_{k+1}\notin\Gamma_G^+(x),$$

否则有向圈μ将可加长。故

$$|\Gamma_G^-(x)\cap X_i|\leqslant|X_i|-|\Gamma_G^+(x)\cap X_i|,$$

或 $$|\Gamma_G^-(x)\cap X_0|+|\Gamma_G^+(x)\cap X_0|-|X_0|<0。$$

设 $y\in X_j\ (j\neq i,0)$，同样有

$$y\in\Gamma_G^-(x)\Rightarrow y\notin\Gamma_G^+(x),$$

由于X_j是一个异于X_0（与X_i）的强联分子图，故同样有

$$|\Gamma_G^-(x)\cap X_j|+|\Gamma_G^+(x)\cap X_j|-|X_j|\leqslant 0,$$

但由(1)有

$$\sum_{\rho=0}^{p}(|\Gamma_G^-(x)\cap X_\rho|+|\Gamma_G^+(x)\cap X_\rho|-|X_\rho|)\geqslant 0,$$

故

$$|\Gamma_G^-(x)\cap X_i|+|\Gamma_G^+(x)\cap X_i|-|X_i|$$
$$\geqslant-\sum_{\rho\neq i}(|\Gamma_G^-(x)\cap X_\rho|+|\Gamma_G^+(x)\cap X_\rho|-|X_\rho|)\geqslant 0。$$

这个不等式就是定理所提出的条件，对于每个$x\in X_i$，在X_i内均成立。据归纳假设G_{X_i}应有H回路。

2．往证存在$X_i(i\neq 0)$使

$$\Gamma_G^+(X_0)\cap X_i\neq\phi,\quad \Gamma_G^-(X_0)\cap X_i\neq\phi,$$

亦即往证，存在$X_i(i\neq 0)$按两个方向与X_0相联。

因图G是强联的，至少存在一个X_j，使

$$\Gamma_G^+(X_0)\cap X_j\neq\phi。$$

考察任一项$x\notin X_0\cup X_j$，若$x_k\in X_0$，且若没有X_i按两个方向与X_0相联，则有

$$x\in\Gamma_G^+(x_k)\Rightarrow x\notin\Gamma_G^-(x_k),$$

故

$$|\Gamma_G^+(x_k)\cap(X-X_0-X_j)|+|\Gamma_G^-(x_k)\cap(X-X_0-X_j)|\leqslant|X-X_0-X_j|$$

$-|\Gamma (x_{.}) \cap (X \cdot X_{.} \cdot X)|$,

如果$y \in X_j$，则对每个$x \notin X \cup X_j$，有：

$$x \in \Gamma_G^+(y) \Rightarrow x \notin \Gamma_G(y),$$

因而

$$\Gamma_G^+(y) \cap (X \quad X_i \quad X_j)$$

$$\leqslant |X \quad X - X_j \quad \Gamma_G(y) \cap (X \quad X \quad X)|,$$

但对每一$y \in X_0 \cup X_j$，自(1)有

$$(\text{;}) \quad \Gamma_G^+(y) \cap (X_0 \cup X_j)| \cdot |\Gamma_G(y) \cap (X_0 \cup X_j)|$$

$$\geqslant X_0 \cup X_j \quad |(X \quad X_0 - X_j) \cap \Gamma_G^+(y)$$

$$- (X - X_0 - X_j) \cap \Gamma_j(y)| + |X - X_0 - X_j|$$

$$\geqslant X_0 \cup X_j|。$$

又因G是强联的，存在自X_j走向X_0形为$[z_0, z_1, \cdots, z_{t-1} z]$的路，其中$z_1, z_2, \cdots, z_{t-1} \notin X_0 \cup X_j$。但因$X_j \cap \Gamma_G(X_0) = \phi$，此路之长……。

作弧(z_0, z_t)，考察由$X_0 \cup X$与弧(z_0, z_t)所构成的子图。由于$\Gamma_G^+(X_0) \cap X_j \neq \phi$，故自$X$中任一点，到$X_0$中任一点均有路，反之亦然。又$X_0$与$X$所构成的子图，均是强联的，故$X_0 \cup X_j$与弧$(z_0, z_t)$所构成的子图是强联的，且具比$G$较少的项。据归纳假设，不等式(1)表明这个图含有$H$—迴路，且它必含弧$(z_0, z_t)$。

用路$[z_0, z_1, \cdots, z_t]$来替代弧(z_0, z_t)得G的一个有向圈，其长大于$|\mu|$，这是矛盾。

故存在一个X_j，按两个方向联到X_0。记这个X_j为X_1。

3．往证每一项$y \in X_1$，满足条件

$$\Gamma_G^+(y) \cap X_0 \neq \phi \quad \Gamma_G^-(y) \cap X_0 \neq \phi。$$

可以假定$|X_1| > 1$，否则当$X_1 = \{x_1\}$据X_1的定义，上述结论自然成立。

$y_0 \in X_1$，不满足条件

$$\Gamma_G^+(y_0) \cap X_0 \neq \phi。$$

命$[y_0, y_1 \cdots, y_{q-1}, y_0]$是$X_1$的一个$H$-迴路，其长为$q$，$1 \leqslant q \leqslant l_0$(自第1部份，在$X_1$里这样的$H$迴路是存在的)。

由X_1的定义，在X_1中存在点，满足$\Gamma_G^-(y) \cap X_0 \neq \phi$，命$y_s$是这样一个下标最小的点，这样的点$y_s$是存在的，且$s \neq 0$。

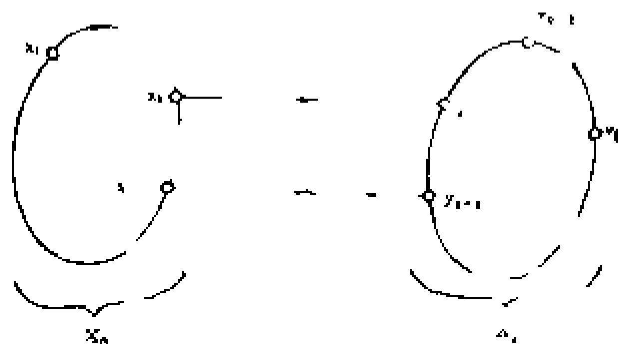


图 9-15

因X_0的H—圈最长，故$x_k \in \Gamma_G(y_s)$导致$x_{k+1} x_{k+2}, \cdots, x_{k+q}$均不属于$\Gamma_G(y_{s-1})$，于是

$$|\Gamma_G(y_{s-1}) \cap X_0| \leqslant l-q$$

故
$$|\Gamma_G^+(y_{s-1}) \cap X_0| + |\Gamma_G^-(y_{s-1}) \cap X_0| - |X_0| \leqslant l-q+0-l = -q,$$

且
$$|\Gamma_G^+(y_{s-1}) \cap X_1| + |\Gamma_G^-(y_{s-1}) \cap X_1| - |X_1| \leqslant (q-1)+(q-1)-q = q-2,$$

对于$i=0,1$，由于y_{s-1}与X_i之间，不可能出现重弧。

故 $|\Gamma_G^+(y_{s-1}) \cap X_i| + |\Gamma_G^-(y_{s-1}) \cap X_i| - |X_i| \leqslant 0$

于是 $|\Gamma_G^+(y_{s-1})| + |\Gamma_G^-(y_{s-1})| - |X|$

$$= \sum_{i=0}^{r} (|\Gamma_G^+(y_{s-1}) \cap X_i| + |\Gamma_G^-(y_{s-1}) \cap X_i| - |X_i|) \leqslant -2,$$

这与(1)矛盾。故

$$\Gamma_G^-(y) \cap X_0 \neq \phi \quad (y \in X_1)。$$

同理，有 $$\Gamma_G^+(y) \cap X_0 \neq \phi \quad (y \in X_1)。$$

4．往证：对每一项$y_s \in X_1$，有

$$|\Gamma_G^+(y_{s-1})\cap X_0|+|\Gamma^-(y_s)\cap X_0|\leqslant l-q+1。$$

实际上，X_0是一个具有l个点的有向初级圈，这些点，可用"∘"与"×"分别标记如次：

若 $x_i\in\Gamma_G^+(y_{s-1})$，标记$x_i$以∘，否则标以"×"。

自第3部份的证明知，当$x_k\in\Gamma_G^-(y_s)$导致在X_0上有q个点$\{x_{k+1},\cdots,x_{k+q}\}$均应标以"×"，故在$X_0$上共有$n_0\neq 0$个"∘"与$n_1\neq 0$个$q$个"×"的列。可能出现多于$q$个连续都是"×"的序列。命$C$记"×"的总数，$\alpha_\lambda$记含在第$\lambda$个最大的"×"的序列里所含$q$个"×"的序列的总数。这个最大的"×"的序列，共含$q+\alpha_\lambda-1$个"×"，

故
$$\begin{aligned}C&\geqslant(q+\alpha_1-1)+(q+\alpha_2-1)+\cdots+(q+\alpha_p-1)\\&\geqslant q+(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_p)-1。\end{aligned}$$

其中p表示"×"的序列的个数，其长$\geqslant q$的。于是

$$n_0+n_1=l-c+\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\leqslant l-q+1,$$

因而有

$$|\Gamma_G^-(y_s)\cap X_0|+|\Gamma_G(y_{s-1})\cap X_0|\leqslant n_1+n_0\leqslant l-q+1。$$

5．往证：存在一项$y_s\in X$，使

$$|\Gamma_G(y_s)\cap X_0|+|\Gamma_G^+(y_{s-1})\cap X_0|\geqslant l-q+2。$$

实际上，自(i)对每一项$y\in X_1$，有

$$\begin{aligned}&|\Gamma_G^+(y)\cap X_0|+|\Gamma_G^-(y)\cap X|\\&\geqslant|X_0|-(|\Gamma_G^+(y)\cap X_1|+|\Gamma_G^-(y)\cap X_1|-|X_1|)\\&-\sum_{j\neq 0,1}(|\Gamma_G^+(y)\cap X_j|+|\Gamma_G^-(y)\cap X_j|-|X_j|)\\&\geqslant l-[(q-1)+(q-1)-q]-0\\&\geqslant l-q+2。\end{aligned}$$

用两种方法计算X_0与X_1之间联弧的个数，有

$$\sum_{s=0}^{l}(|\Gamma_G(y_s)\cap X_0|+|\Gamma^+(y_{s-1})\cap X_0|)$$

$$\sum_{s=0}^{q-1}(|\Gamma_G^+(y_s)\cap X_0|+|\Gamma_G^-(y_S)\cap X_0|)$$

$\geqslant q(l-q+2)$。

故至少应存在一点y_S，满足不等式

$$|\Gamma_G^-(y_S)\cap X_0|+|\Gamma_G^+(y_{S-1})\cap X_0|\geqslant l-q+2。$$

这和第4步的结果矛盾，于是定理得证。

（证毕）

读者可注意，定理9.14的条件

$$d_G^+(x)+d_G^-(x)\geqslant n$$

也只是充分的。譬如右图9.16无环，强联，有H-迴路。但上述条件是不满足的。

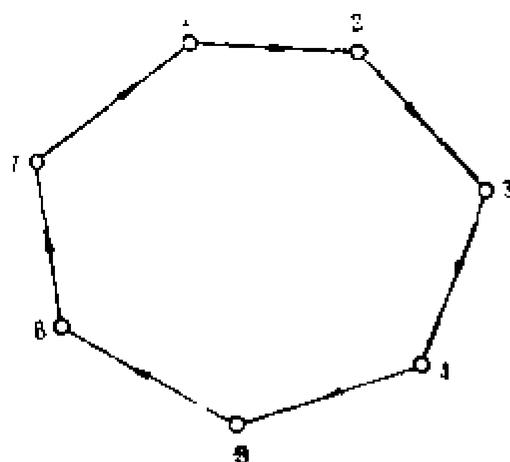


图 9.16

定理9.15 (Nash-Williams,〔1969〕) 设$G=(X,\Gamma)$是一个阶$n\geqslant3$，无环的1—图，且

$$d_G^+(x)\geqslant\frac{n}{2},\qquad d_G^-(x)\geqslant\frac{n}{2}\qquad(x\in X)$$

则G有H—迴路。

证 据定理9.14，能证G强联即足。实际上，当$G=(X,\Gamma)$是一个无环的1—图，具性质

$$d_G^+(x)\geqslant\frac{n-1}{2},\qquad d_G^-(x)\geqslant\frac{n-1}{2}\qquad(x\in X)$$

时，G便是强联的。

假设定理不成立，则在G里存在强联分子图。$X_1,X_2,\cdots,X_p$，将这些分子图，均凝缩成一点，则所得的图决不能有有向圈。故至少有一联接分子图譬如X_1，具性质：

$$m_G^+(X_1,\ X-X_1)=0,$$

复有另一分子图，譬如X_2，具性质：

$$m_G^+(X-X_2, X_2)=0,$$

设$|X_1|\geqslant|X_2|$，取 $x_0\in X_2$，则

$$d_G^-(x_0)\leqslant|X_2|-1\leqslant\frac{n}{2}-1\leqslant\frac{n-1}{2},$$

这和原假设矛盾。

若$|X_1|\leqslant|X_2|$，可取$x_0\in X_1$，则

$$d_G^+(x_0)\leqslant|X_1|-1\leqslant\frac{n}{2}-1<\frac{n-1}{2},$$

这也是矛盾。（证毕）

定理9.16 设G是一个无环，阶$n\geqslant3$的1—图，具性质

$$d_G^+(x)\geqslant\frac{n+k}{2},\qquad d_G^-(x)\geqslant\frac{n+k}{2}\qquad(x\in X)$$

其中k是一个整数：$0\leqslant k\leqslant n-1$，
则G中每一个k长的初级路含在一个H回路内。

证 设 $\mu_0=[a_0, a_1, \cdots, a_k]$是$G$里一条$k$长的路，命

$$A=\{a_0, a_1, \cdots, a_k\},$$

自G,舍去A,加进新点a,对每一点$x\in X-A$，且$x\in\Gamma_G^-(a_0)$的，加进弧(x,a)，又对每一点$y\in X-A$，其$y\in\Gamma_G^+(a_k)$的，加进弧(a, y)得图G_0，图G_0共有$n-k=n_0$个项，且对每一项$x\neq a$，有

$$d_{G_0}^+(x)=d_G^+(x)-m^+(x,A-\{a_0\})\geqslant d_G^+(x)-k,$$

$$d_{G_0}^-(x)=d_G^-(x)-m^-(x,A-\{a_k\})\geqslant d_G^-(x)-k,$$

又 $d_{G_0}^+(a)=d_G^+(a_k)-m_G^+(a_k,A-\{a_k\})\geqslant d_G^+(a_k)-k,$

$$d_{G_0}^-(a)=d_G^-(a_0)-m_G^-(a_0, A-\{a_0\})\geqslant d_G^-(a_0)-k,$$

故在图G_0上，其每一项x，有性质

$$d_{G_0}^+(x)\geqslant\frac{n+k}{2}-k=n_0/2,$$

$$d^-_{\Gamma}(x) > \frac{r+k}{2} - k \quad n_0/2,$$

据定理9.15，G_0有H—回路过顶a，将顶a改成路μ_0便得原图G的一个H—回路，包含路μ_0。　　　　（证毕）

§6　哈密尔顿链与哈密尔顿路

本节将分两部份：第一部份研究无向图$G=(X, E)$上的哈密尔顿链的问题。第二部份研究有向1—图$G=(X, \Gamma)$上的哈密尔顿路的问题。和先前一样，前者简记为H—链，后者简记为H—路。

已给无向图$G=(X, E)$，在§3与§4里，我们分别研究了H—圈存在的充分条件与必要条件。假使能找到一条链自一个顶出发，终于另一顶，经过图的每个顶一次且仅一次，则这样的链叫做**哈密尔顿链**，简记为H—链。假使图G有H—圈，则某些相邻点对之间是有H—链的。另一些相邻点对之间，有无H—链相联，不能确定。非邻点对之间，有无H—链相联，则更不能确定。如图9.13(一)的Tutte图，虽无H—圈，但至少有三个不同的H—链，取不相邻的点对，做起点和终点。

一个无向图$G=(X,E)$，其任一对点（相邻或否）之间，总至少有一个H—链将其相联，则这样的图，称为**是哈密尔密联接的**，简记作H—联。

若任给边集F，$|F|=q$，而(X,F)是若干个顶互质的初级链，x,y是两个不同的初级链的顶点。若无向单纯图G总有H—链包含F，取此二点做为它的起点和终点，则图G称为是**q—H—联的**。当$q=0$，便是一般的所谓H—联。于此先定义下概念：

q—H—联图类$\mathscr{H}(n,q)$：已给$n\geqslant 3$，$0\leqslant q\leqslant n-2$，

一组n阶单纯无向图G （X，E），满足下二条件：

（1）在G内任取边集F，F q，只须（X，F）是若干个点互质的初级链的合，则在G内，存在H—圈，包含F。

（2）若$G\in\mathscr{H}(n,q)$，u，v二点不相邻，联u，v得新边$[u,v]$，加进图G，得新图G' $G+[u,v]$则$G'\in\mathscr{H}(n,q)$，

这些无向单纯图G，构成一个类，称作$q-H$—联图类，记作$\mathscr{H}(n,q)$。

引理9.1 类$\mathscr{H}(n,q)$中每个无向单纯图G是（$q-1$）—H—联的。

证 设图$G=(X,E)\in\mathscr{H}(n,q)$，$F$是图$G$中$q-1$条边所成的边集，（$X$，$F$）是若干个点互质的初级链之合。再设$x,y$是（$X$，$F$）中二相异链两个顶点。若边$[xy]\in E$，取$G'=G$；若边$[xy]\notin E$，取$G'=G+[xy]$。据类$\mathscr{H}(n,q)$的两个条件，知$G$或$G'$有$H$—圈，包含$F\cup[xy]$，故$F$总含在一个无向单纯图$G$的一条$H$链内，取$x$与$y$为其起点和终点。 （证毕）

在这里须注意，所给的边集F，必须可分成若干个点互质的初级链，其个数$\geqslant 2$。若F本身是一个初级链，x，y为其端点，则在图G中便不可能有H—链，包含F，而以x，y为其端点。

定理9.17 设G （X,E）是一个阶$n\geqslant 3$的无向单纯图，将顶按次数的递升序列编号，$d_1\leqslant d_2\leqslant\cdots\leqslant d_n$，其中$d_i$满足条件：

$$d_{k-1}\leqslant k\ (2\leqslant k\leqslant \frac{n}{2})\Rightarrow d_{n-k}\geqslant n-k+1,$$

则图G是H—联的。

证 据定理9.3，满足上述条件的n阶单纯图有H—圈，包含任给的一条边（即任一相邻的点对），向G增加一条新

边，得G'，则G'也满足条件

$$d_{k-1}\leqslant k\Rightarrow d_{n-k}\geqslant n-k+1。$$

故在G'里存在H—圈，包含G里任一边，故图$G\in\mathscr{H}(n,1)$，据引理9.1知G是$O-H$联的，即G是H—联的。

（证毕）

定理9.18 （Erdös，Gallai，[1959]）设$G=(X,E)$是一个阶$n\geqslant 3$的无向的单纯图，在这个图上，任二相异非邻点x与y的次数，满足条件

$$d_G(x)+d_G(y)>n,$$

则G是H—联的。

证 欲证G是H—联的，须证$G\in\mathscr{H}(n,1)$。首先须证G含H—圈包含G的任一边。设定理不成立，命G是最大的无向单纯图，不存在H—圈包含图的任一边。设e_0是这样的一边。由于G的极大性，又因G不可能是完全图K_n，故可向图G增加新边$[a,b]$，其中a与b是原图G中相异的不相邻点对。命$G'=G+[ab]$，则G'里将有H—圈包含边e_0。故在原图G里存在H—链包含边e_0，形如

$$\mu[a,b]=[a,y_2,y_3\cdots y_{n-1},b],$$

取$y_1=a$，并命

$$I=\{i/i\geqslant 2,[a,y_i]\in E,[y_{i-1},y_i]\neq e_0\}。$$

由于$d_G(a)\geqslant 1$，故$d_G'(a)\geqslant 2$而$e_0=[y_{i-1},y_i]$最多只有一条，故

$$|I|\geqslant d_G(a)-1。$$

又若$i\in I$，则$y_{i-1}\notin\Gamma_G(b)$，否则

$$[a,y_i,y_{i+1},y_{i+2},\cdots,y_n(=b),y_{i-1},y_{i-2},\cdots,a]$$

将是G里一个H—圈，包含e_0，由此知

$$n-1-d_G(b)\geqslant|I|\geqslant d_G(a)-1,$$

故 $$d_G(a)+d_G(b)\leqslant n,$$

这是矛盾。故满足条件的图G有H—圈含G的任一边。对

G增加任一新边$[a,b]$得G'。G'当然也能满足定理的条件，故在G'里有H—圈，包含G'的任一边。于是$G\in\mathscr{H}(n,1)$，据引理，知G是H—联的。

（证毕）

定理9.19 （Ore,〔1963〕）设G是一个阶$n\geqslant 3$的无向单纯图，具m条边，且$m\geqslant\binom{n-1}{2}+3$，则$G$是$H$—联的。

证 设$G\neq K_n$，则在G里，存在非邻点对a与b。命E_0表示所有不和a与b相邻的边集，则

$$|E|=d_G(a)+d_G(b)+|E_0|,$$

且因E_0不含大于K_{n-2}的边集，故

$$|E_0|\leqslant\frac{1}{2}(n-2)(n-3),$$

故
$$d_G(a)+d_G(b)=|E|-|E_0|$$
$$\geqslant\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+3-\frac{1}{2}(n-2)(n-3)=n+1,$$

即
$$d_G(a)+d_G(b)>n,$$

据上定理9.18，乃得本定理。

（证毕）

从以上几个定理，可知对于单纯无向图G是H—联的要求，比G是H—型的要求强得多。H—型的要求，只是要求在G里有H—圈存在，而H—联，则要求在图G里过每一边，有H—圈，且当a,b二顶不相邻时，作图$G'=G+[a,b]$，G'里应有H—圈过边$[a,b]$。$G\in\mathscr{H}(n,1)$是G为H—联的充分而又必要的条件。

在本节的后半部，将往研究有向图上H—路的存在问题。所谓H—路，就是一条路，过图的每一顶一次且仅一次，研究H—路的问题，基本从定理9.14出发。

定理9.20 设$G=(X,\Gamma)$是一个无环的1—图，具性质

$$d_G^+(x)+d_G^-(x)\geqslant n-1 \qquad (x\in X)$$

则G有H—路。

证 向G加进一点x_0，自x_0到其他各项联方向相反的两条弧，得有向1—图$G'=(X',\Gamma)$。显见G'是强联的，无环，且$d_{G'}^+(x)+d_{G'}^-(x)\geqslant n-1+2=n+1=n'$ $(x\in X')$ 据定理9.14，G'有H—回路，在这条H—回路上，抹去项x_0便得G的一条H—路。

推理9.20$_a$ 设$G=(X,\Gamma)$是一个完全1—图，则G有H—路。

证 由于G是一个完全1—图，依定义，G的每二项之间，至少有一弧，故

$$d_G^+(x)+d_G^-(x)\geqslant n-1 \qquad (x\in X)$$

据上定理9.20乃得本推理。

（证毕）

推理9.20$_b$ 竞赛图$G=(X,\Gamma)$有H—路。

证 竞赛图$G=(X,\Gamma)$是一个逆对称的完全1—图，具条件

$$d_G^+(x)+d_G^-(x)=n-1 \qquad (x\in X)$$

据推理**9.20**$_a$ 便得本推理。

（证毕）

定理9.21 设$G=(X,\Gamma)$是一个阶$n\geqslant3$的无环的强联1—图，若在图中任意抹去一项所得图仍保持强联，且

$$d_G^+(x)+d_G^-(x)\geqslant n+1 \qquad (x\in X),$$

则对每一对相异项a与b，在G里存在一条H—路以a，b为其端点（即H—路自a到b或自b到a）。

证 将a，b二项凝缩成一点C，命所得的图是G'，且取

$$\Gamma_{G'}^+(c)=\Gamma_G^+(b)-\{a\},$$

$$\Gamma_{G'}^-(c)=\Gamma_G^-(a)-\{b\},$$

又命所得图为G''，且取

$$\Gamma^+_{G''}(c) = \Gamma^+_G(a) - \{b\},$$
$$\Gamma^-_{G''}(c) = \Gamma^-_G(b) - \{a\}。$$

由于在G里任意去一点，所得图仍是强联的，故自任一点$x \neq a$，b，有路，自x到a，避开b，又有路自b到x避开a，故在G'里，自x到c和自c到x均有路可通，故G'是强联的。同理G''也是强联的，就G'与G''而言，有

$$|\Gamma^+_{G'}(c)| + |\Gamma^-_{G'}(c)| + |\Gamma^+_{G''}(c)| + |\Gamma^-_{G''}(c)|$$
$$\geqslant |\Gamma^+_G(b)| - 1 + |\Gamma^-_G(a)| - 1 + |\Gamma^+_G(a)| - 1 + |\Gamma^-_G(b)| - 1$$
$$\geqslant 2|X| - 2 = |X'| + |X''|,$$

故下二不等式，至少有一能成立：

$$|\Gamma^+_{G'}(c)| + |\Gamma^-_{G'}(c)| \geqslant |X'|$$
$$|\Gamma^+_{G''}(c)| + |\Gamma^-_{G''}(c)| \geqslant |X''|$$

设第一式成立，则因图$G' = (X', \Gamma)$是强联，无环，1—图，且

$$d^+_{G'}(x) + d^-_{G'}(x) \geqslant |X'|, \quad (x \in X')$$

故图G'有H—回路过顶C。回到图G，在G里将有H—路自顶b走向顶a。若是第二种情况，在原图G里将有H—路，自顶a走向顶b。

（证毕）

这个定理，实际上是无向图里H—联那个概念的推广。

定理9.22 设图$G = (X, \Gamma)$是一个n阶无环的1—图，具性质

$$d^+_G(x) \geqslant \frac{n+1}{2}, d^-_G(x) \geqslant \frac{n+1}{2} \quad (x \in X),$$

则每一对顶a与b之间有H—路相联。

证 若$a \in \Gamma(b)$，取$G' = G$，否则取$G' = G + (b, a)$，图G'满足定理9.16的条件，故G'有H—回路，包含弧(b, a)。故在原图G里，有H—路，自a走到b。

（证毕）

这个定理实际上表示每二相异顶总是图G里某条H—路的端点。二相异顶a，b之间，可能有二条H—路，一个是自a到b，一个是自b到a，当然这两条H—路不一定是弧互质的。

§7 竞赛图上H——路的求法

为了说明这个问题，先介绍下面的一些概念和定理。

定理9.23 设有向图$G=(X,\Gamma)$是一个完全1—图（可能有环），在图上任一点x_0具下性质：

$$|\Gamma(x_0)-\{x_0\}|=\max_{x\in X}|\Gamma(x)-\{x\}|,$$

则称x_0是**图的中心**，且自这点到图上任一点有路，其长不超过2。

证 中心x_0的存在是很明显的。

设有点$y\neq x_0$，不能自x_0出发，最多用两条弧走向y，则$y\notin\Gamma(x_0)$，因图是完全的故$x_0\in\Gamma(y)$，

在$\Gamma(x_0)-\{x_0\}$中任取一点z，若$y\in\Gamma(z)$，则有路，其长为2自x_0从z通向y，否则$z\in\Gamma(y)$，于是

$$\Gamma(y)-\{y\}\supset\Gamma(x_0)-\{x_0\},$$

或

$$|\Gamma(y)-\{y\}|>|\Gamma(x_0)-\{x_0\}|=\max_{x\in X}|\Gamma(x)-\{x\}|,$$

这是矛盾。由此可知自中心x_0到图上任一点$y\neq x_0$均有路可通，且路长不超过2，这样的点，又称为**图的根**。

（证毕）

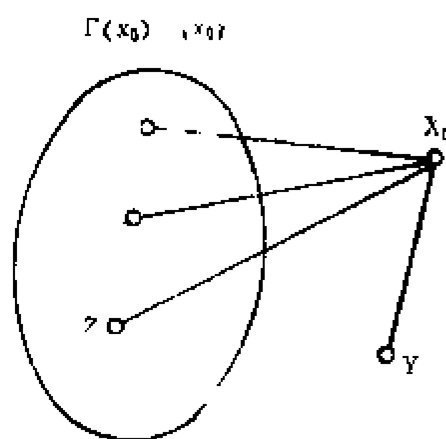


图 9.17

推理9.23$_a$ （Camion，〔1959〕）设有向图$G=(X,\Gamma)$是一个强联的完全1—图，则G有H—回路。

证 因G是一个强联的完全1—图，故G上总有回路，但G是有限的，故在G上有极大回路

$$\mu\ [a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}\ \cdot a_1]。$$

往证μ是一条H—回路，即μ过G的每个顶一次且仅一次。

设$X-\{a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}, a_k\}\neq\phi$，

取$b\in X\ \{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$，

则 $a_i\in\Gamma(b)\Rightarrow b\notin\Gamma(a_{i-1})\Rightarrow a_{i-1}\in\Gamma(b)$

$b\in\Gamma(a_i)\Rightarrow a_{i+1}\notin$

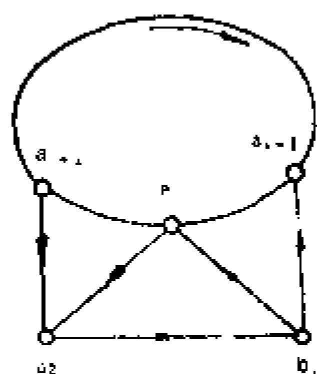


图 9 18

$\Gamma(a_{i+1})$因图是完全的，。 。大的，故当$X-\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}\neq\phi$，其中的点可分为两部份，一部份$B_1$里点都指向$\mu_1$。另一部份$B_2$中的点，总自$\mu$有弧发来，又因图是强联的，$B_1\neq\phi$，$B_2\neq\phi$，且自$B_2$有弧指向$B_1$，譬如弧$(b_2, b_1)$，于是

$$\mu'\ [a_1, a_2, \cdots, a_i b_2 b_1 a_1]$$

是一个回路长于μ，这是矛盾。

（证毕）

总结以上所论，可知完全1－图G总有中心x_0，向G增加一点z，并增加弧(z, x_0)与(x, z)其中$x\neq x_0$是X中任一点，得图G'，G'是强联的，故G'有H—回路，在这条回路上，去掉z，便得原图G里自x_0出发的H—路，据此在一个竞赛图上，作H—路的具体作法，可总结为次：

第一步，确定$\max\limits_{x\in X}\ \Gamma(x)\ \ \{x\}$，以确定一个根$x_0$，

第二步，在$(\Gamma(x_0)-\{x_0\})$中选取一点x_1其出次最大，继续这样做，最后可得H—路$x_0x_1\cdots$。

例 下面是一个竞赛图，它的一个H—路作出如下：

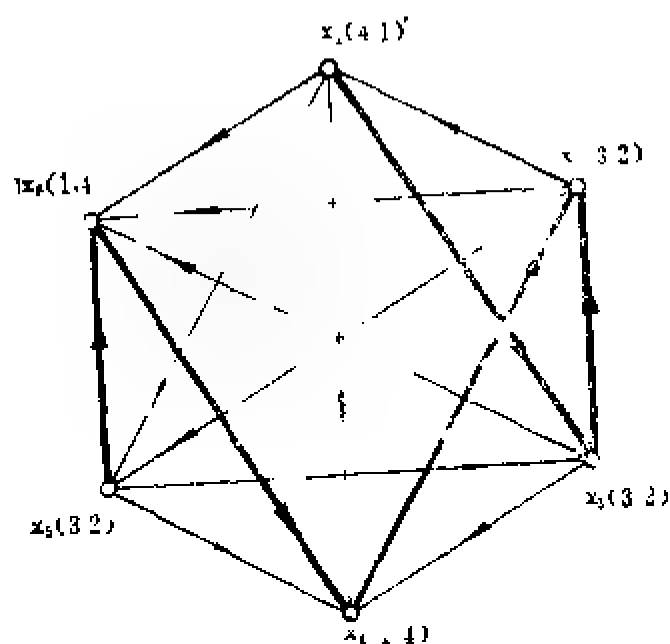


图 9.19

画出竞赛图，如图9.19标出每一顶上的出次与入次。首先取出次最大的点x_1，$\Gamma(x_1)=\{x_3, x_4, x_5, x_6\}$。在$\Gamma(x_1)$中出次最大的有$x_3$与$x_5$，取$x_3$，$\Gamma(x_3)=\{x_2, x_4, x_6\}$，再取$x_2$，$\Gamma(x_2)=\{x_5, x_6\}$，$\Gamma(x_5)=\{x_4, x_6\}$，$\Gamma(x_6)=\{x_4\}$，于是$x_1x_3x_2x_5x_6x_4$便是一条$H$一路。

下面再举两个例，作为本章的结束：

例 1 有一部机器制造n种不同的产品J_i（$i=1, 2, \cdots, n$），但每完成一个产品之后，须将机器加以调整才能生产下一种产品。设生产产品J_i之后，生产产品J_j调整机器须耗费时间t_{ij}。如何安排，才能使生产这n种产品调整机器所耗费的时间最少？

例如有六种产品，其先后调整机器所耗费的时间列表如下：

	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6
J_1	0	5	3	4	2	1
J_2	1	0	1	2	3	2
J_3	2	5	0	1	2	3
J_4	1	4	4	0	1	2
J_5	1	3	4	5	0	5
J_6	4	4	2	3	1	0

将生产顺序，按耗费时间的大小排列，画出图（实际是一个竞赛图）。J_2J_5上有二方向，表示J_2之后生产J_5与J_5之后生产J_2耗费的时间是一样的。取时间耗费较少作为方向，得图如下（图9·20）：

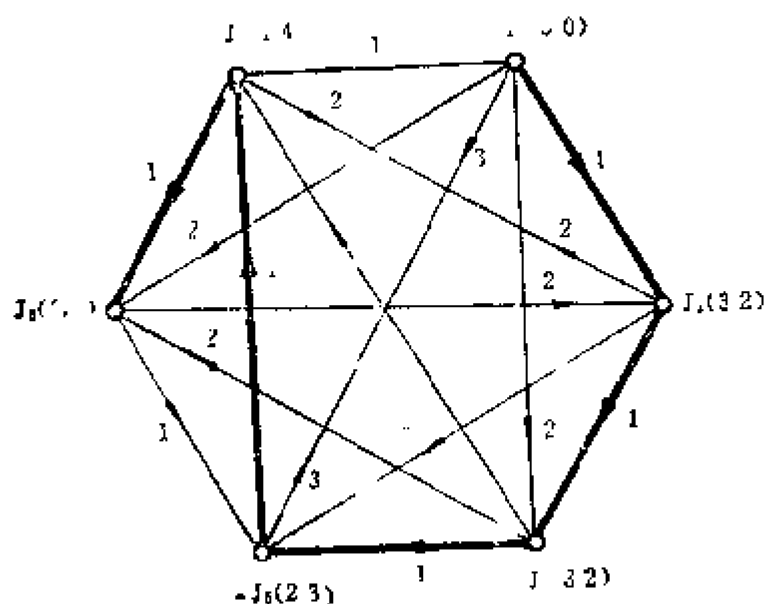


图 9·20

自J_2起，排出H—路$J_2J_3J_4J_5J_1J_6$总的耗费时间是5，显见这是最好的。任选排列$J_1J_4J_3J_2J_5J_6$，调整机器总耗费时间是21，这可能是最坏的情况（读者可注意，这里可用第十章§4最后一段所讲的方法来进行演算）。

在矩阵

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 0 & 5 \\ 4 & 4 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

中的元素，最大没有超过8的，主对角线上的元素都是0，自8减去矩阵中非零元素，仍作为这个元素所在位置的元素，得一新矩阵，对于这个矩阵，使用Kuhn -Munkres

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 & 4 & 6 & 7 \\ 7 & 0 & 7 & 6 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 0 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 4 & 4 & 0 & 7 & 6 \\ 7 & 5 & 4 & 3 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 6 & 5 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$

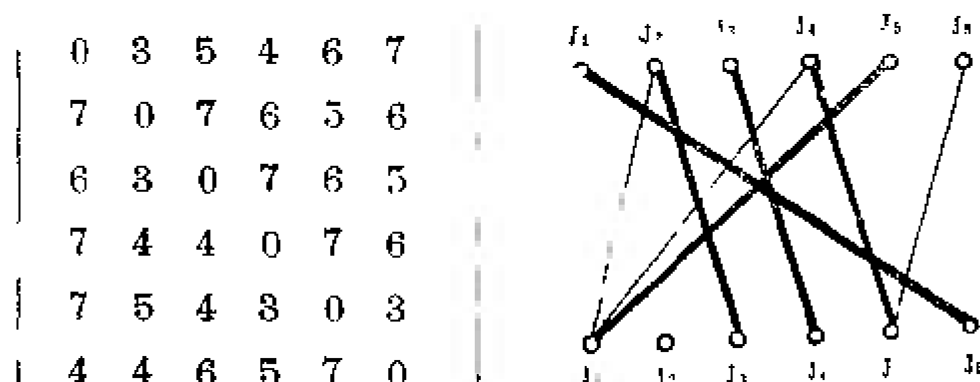


图 9-21

法则，求出一个分别在X，Y中各有一个下标彼此不同的点为饱和点的极大并列集。在本例中得极大并列集{〔23〕，〔34〕，〔45〕，〔51〕,〔16〕}。还原到原来的问题，便是J_2之后，跟随J_3，跟随J_4，J_5，J_1，J_6，调整机器所耗费的时间最少，其值是$1+1+1+1+1=5$。

例 2 计算机磁鼓的设计，是一个找有向尤拉圈的问题。旋转磁鼓，用二进位，在磁鼓上安排好位置是0或1，要使每连续n个位置代表一个数，旋转一周，恰好得2^n个数。问这些0和1应如何安排，使不出现重复。下面举$n=4$为例。

解 首先说明尤拉回路这个概念，在有向图$G=(X, U)$里

$$d_G^+(x) = d_G^-(x) \qquad (x \in X),$$

则图G称为是**拟对称的**。很明显，这样的图若是联接的，其每顶的次，应都是异于零的偶数。和证明本章定理9.1一样，可以证明在这样的图上，必存在尤拉回路，反之亦然。

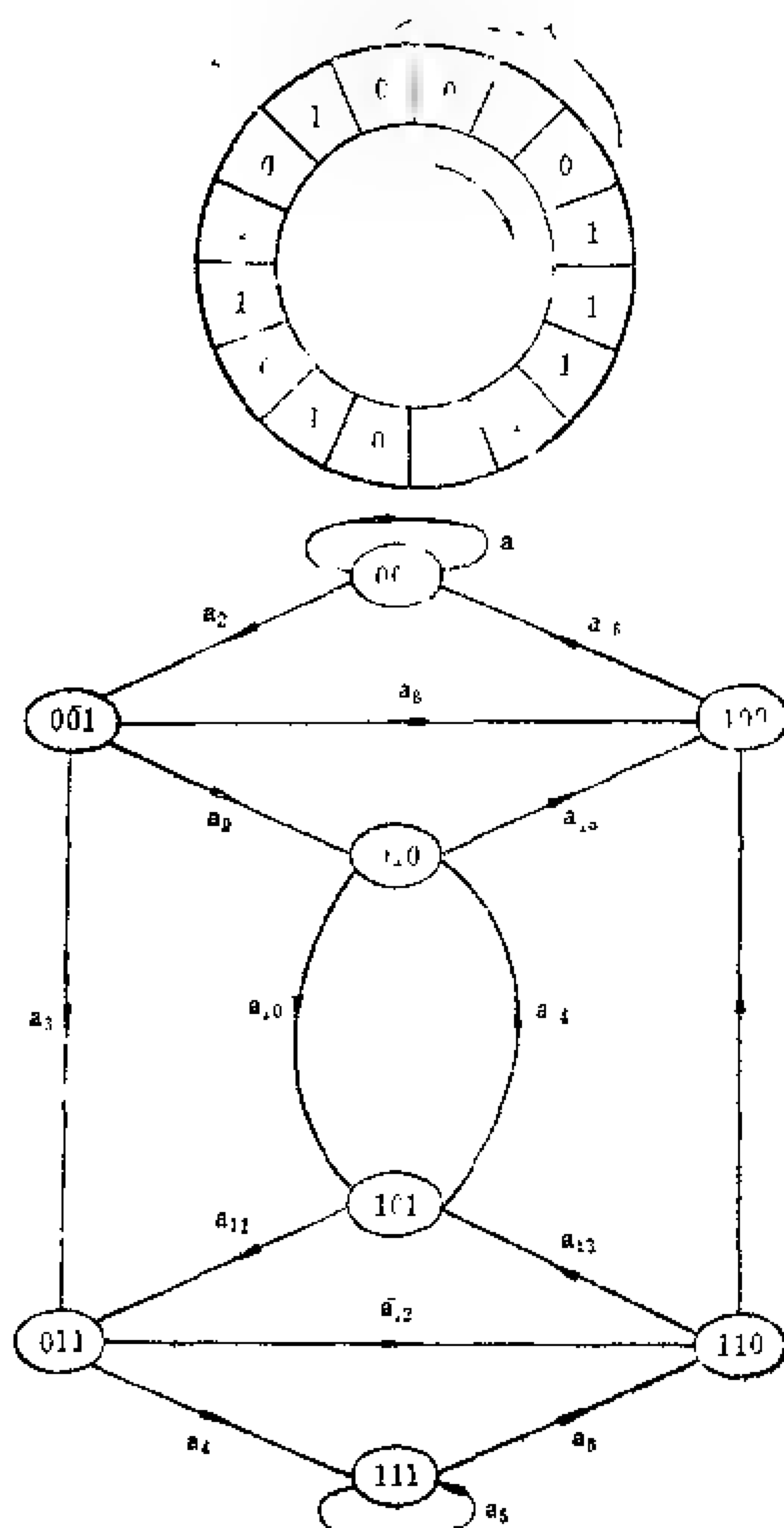


图 9 22

弧	二进位	弧	二进位
a_1	0000	a_9	0010
a_2	0001	a_{10}	0101
a_3	0011	a_{11}	1011
a_4	0111	a_{12}	0110
a_5	1111	a_{13}	1101
a_6	1110	a_{14}	1010
a_7	1100	a_{15}	0100
a_8	1001	a_{16}	1000

先排3个位数的二进位数，共有$2^3=8$个，作8阶的图。当一点是$P_1P_2P_3$，其下点便取$P_2P_3q_1$与$P_2P_3q_2$，其P_i、q都是0或1。联弧$(P_1P_2P_3, P_2P_3q_1)$与$(P_1P_2P_3, P_2P_3q_2)$这样便联得一个拟对称的图G。当取$n=3$，所得图便如图9·22。按规律联弧，在每一顶x，恒有2弧自该顶发出，也恒有二弧，发入该顶。故恒有

$$d_G^+(x)=d_G^-(x)=2 \quad (x\in G),$$

该图共有$2^3\cdot 2^2/2=2^4=16$条弧，每条弧可用四位的二进位数来表示。在每条弧上，起点的后两位数，与终点的首二位数是相同的，那末，把终点的末位数，附在第一点之末，便得一个四位的二进位数。譬如弧a_2，其表示数是0001，a_3是0011等等。

自任一点出发，求出一个尤拉回路，顺次在经过的顶的二进位数上，加进下一点的末位数，最后便得所要求的磁鼓上0和1的排列顺序。如图9·22所标出的那个尤拉回路。在磁鼓上所表示的0和1的排列是0000111100101101。

习　题

1　设G是一个非平凡的尤拉圈，x是G中一点。试证：起点在x的任何一条链都可扩充为G的一条尤拉圈的充要条件是：$G-x$是林。

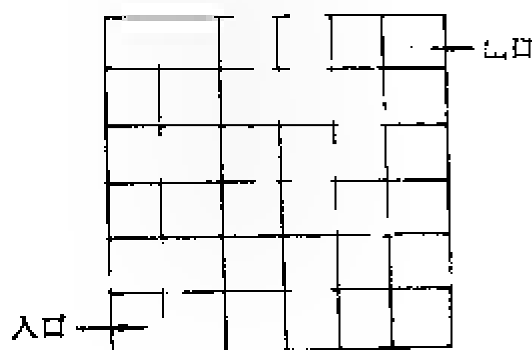
2　设有向图$G=(X, U)$是联接的。试证明：G是尤拉圈，当且仅当对每个点$x\in X$，有$d_G^+(x)=d_G^-(x)$成立。

3　设有向图$G=(X, U)$是联接的。试证明：G是尤拉圈，当且仅当G的弧可分解为回路。

4　试证明：如果(1)图$G=(X, E)$不是2——联的，或者(2)图G是二分图$(X_1, X_2; E)$但$|X_1|\neq|X_2|$，则图G是非哈密顿的。

5　耗子要吃全部$3\times3\times3$立方块的乳酪。按其方法是挖洞通过所有27个$1\times1\times1$的小立方块。如果在一个角上开始，问它可否在立方体中心完成？

6　一展览会有36个展览室，布成6×6的方阵如下图示。其中每一个展览室均与相邻的展览室有门相通。今欲从入口进入，把每个展览室参观一次且仅一次后由出口离开，此想法能实现吗？为什么？



7　设单纯图G各点的次数依次为：$d_1\le d_2\le\cdots\le d_n$。又设其补图$\overline{G}$的各点的次数依由小到大的顺序排列为：$d_1'\le d_2'\le\cdots\cdots\le d_n'$。试证：如果对一切$m<n/2$都有$d_m\ge d_m'$，则$G$有$H$—路。进一步推导出结论：如果图$G$是自补的，则$G$有$H$—路。

(C. R. J. Clapham)

8　设$G=(X, Y; E)$是单纯的二分图，$|X|=|Y|\ge2$，其各点的次数依由小到大的顺序排列为：$d_1\le d_2\le\cdots\le d_n$，$n=|X\cup Y|$。试证明：如果满足条件：$d_m\le m$及$d_{n/2}\le n/2-m$的$m$值均大于$n/4$，则$G$是$H$—型的。

(V. Chvátal)

9．设单纯图G的每点的最小次数为δ，共有n点、m边。试证明，如果$n\geq 6\delta$，

且 $m>\binom{n-\delta}{2}+\delta^2$，则$G$是$H$—型的。　　　　（R Erdős）

10．试证明，如果单纯图G是联结的，点数$n>2\delta$，其中δ为最小次数，则G含有一条长度至少为2δ的链。　　　　（G A Dirac）

11．Dirac 1952年曾证明：如G是2联的单纯图，$n\geq 2\delta$，其中n是点数，δ是最小次数，则G中含有长度至少为2δ的圈。试利用此结论证明：（$4k+1$）个顶点上的每一个$2k$次正则单纯图都是H—型的图（$k\geq 1$）。　　（C St J A Nash—Williams）

12．设单纯图G各点的次数依次为$d_1\leq d_2\leq\cdots\leq d_n$，$q$为整数，$0\leq q\leq n-3$，试证明：如果由$1\leq i<j\leq n$，$d_i\leq i+q$，$d_j\leq j+q-1$，即导致$d_i+d_j\geq n+q$，则对每一个边集合$F$，$|F|=q$，且$(X, F)$是点互质的初级链集合，则存在一个$H$—圈，含有边集$F$。

13．设单纯图G的阶$n\geq 3$，整数q满足$0\leq q\leq n-2$，试证明：如果（1）对每个k，$q<k<\frac{1}{2}(n+q-1)$，以S_k表示次数$\leq k$的点集，则$|S_k|<k-q$，（2）如果$n+q$为奇数，且$k=\frac{1}{2}(n+q-1)$，则$|S_k|\leq k-q$，则对每个边集F，$|F|=q$，(X, F)为点互质之初级链，存在一个H—圈含边集F。　　　　（Kronk，〔1969〕）

14．设单纯图G的阶$n\geq 3$，各点的次数依次为$d_1\leq d_2\leq\cdots\leq d_n$，试证明：如果由$i\neq j$，$d_i\leq i$，$d_j\leq j$就导致$d_i+d_j\geq n$，则$G$含$H$—圈。　　（Bondy〔1969〕）

15．设$G=(X, Y, E)$为单纯的二分图，$|X|=|Y|=n\geq 2$，且$d_G(x_1)\leq d_G(x_2)\leq\cdots\leq d_G(x_n)$，$d_G(y_1)\leq d_G(y_2)\leq\cdots\leq d_G(y_n)$，试证明：如果$d_G(x_k)\leq k<n$导致$d_G(y_{n-k})\geq n-k+1$，则$G$含有$H$—圈。

（Chvátal〔1972〕）

16．设单纯图G的阶$n\geq 3$，试证明：如果（1）对每个整数k，$1\leq k<\frac{n-1}{2}$，顶点中次数$\leq k$的个数$<k$，（2）如n为奇数，则次数$\leq\frac{n-1}{2}$的顶点个数$\leq\frac{n-1}{2}$，则G含H—圈。　　　　（Pósa〔1962〕）

17．设单纯图G的阶$n\geq 3$，其各点次数依次为$d_1\leq d_2\leq\cdots\leq d_n$，试证明：

如果由 $k<\frac{n}{2}$ 可得出 $d_{\cdot}>k$，则 G 含 H—圈。

18．设单纯图 G 的阶 $n\geq 3$，点 x_1 的次数最小。试证明：如果 $d_G(x_1)\geq 2$，且对一切 $x\neq x_1$ 的点 x 均有 $d_G(x)\geq\frac{n}{2}$，则 G 含 H—圈。
（Erdös，Gallai〔1959〕）

19．试证明，如果 $m\neq n$，则完全二分图 $K_{m,n}$ 不具有 H—圈。如果 $m=n$，则 $K_{m,n}$ 有〔$n/2$〕个边互质的 H—圈。

20．利用16题的结果证明：如果图 G 具 n 点、m 边，其极小次数为 δ 且满足条件：

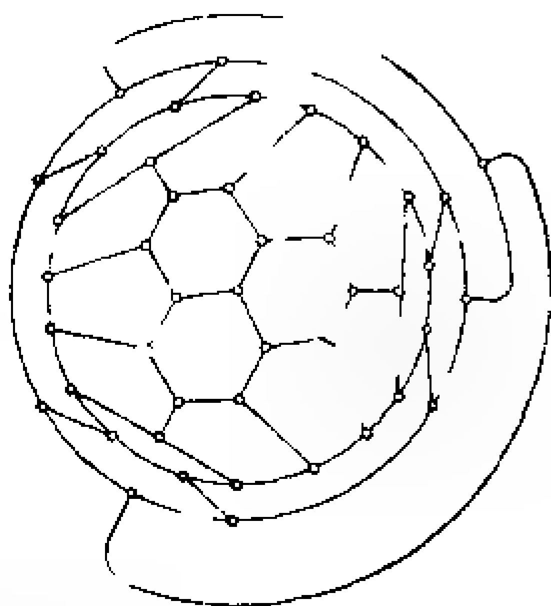
$$m\geq 1+max\{\binom{n-\delta}{2}+\delta^2,\ \binom{n-\left[\frac{n-1}{2}\right]}{2}+\left[\frac{n-1}{2}\right]^2\},$$

则 G 含有 H—圈。

21．试证明：如果单纯二分图 $G=(X,Y;E)$ 中 $|X|=|Y|=n$，$|E|=m$，极小次数为 $\delta\leq\frac{n}{2}$ 且满足条件

$$m\geq 1+max\{n(n-\delta)+\delta^2,\ n(n-[\frac{n}{2}])+[\frac{n}{2}]^2\}$$

则G含有 H—圈。



22．试证明：图中不含 H—圈。（Tutte）

23．给出一个具10个点的非哈密顿单纯图的例子，且使其每一非相邻点偶 x 与 y 均满足：$d(x)+d(y)\geq 9$。

24．如单纯图G的点数 $n\geq 4$，边数为 m，试证明：如G是 H—联的，则 $m\geq\{\frac{3n+1}{2}\}$，又对 $n\geq 4$ 构造一个 $m=\{\frac{1}{2}(3n+1)\}$ 的 H—联的图。

25　设$G=(X, U)$为一强联通的有向图且满足条件：如果弧$(x, y)\notin U$，则必有弧$(y, x)\in U$。又设G的阶$n\geq 3$。试证明：G的每一个顶点x都属于某一个长为k的回路，其中$k=3, 4, 5, \cdots, n$。

26　如果一个n阶图G不含H—圈，但去掉其任一个顶点x后所得的子图G_x都有H—圈，此时称图G为亚哈密顿的图。试证明下列结论：

（1）如G是亚哈密顿的，则$n>3$；

（2）如G是亚哈密顿的，则每点x均有$d_G(x)\geq 3$；

（3）如G是亚哈密顿的，又y、z是G_x中任一个长为（$n-1$）的初级圈上的相邻二顶点，则x不能与y、z同时相邻。

（4）如G是亚哈密顿的，则对每个点x有，$d_G(x)\leq\frac{n-1}{2}$；

（5）设x，a，a'，b，b'为G中不同的点，x与a、a'相邻，b与b'相邻，且弧（a，b）与（a'，b'）都含于G_x的某个哈密顿圈中，则G有H—圈。

（6）如G是亚哈密顿的，则$n\geq 7$；

（7）如G是亚哈密顿的，则$n\neq 7$

（8）如G是亚哈密顿的，则$n\neq 8$

（9）如G是亚哈密顿的，则$n\neq 9$；

（10）如G是10阶的亚哈密顿的，则G是3次正则的。

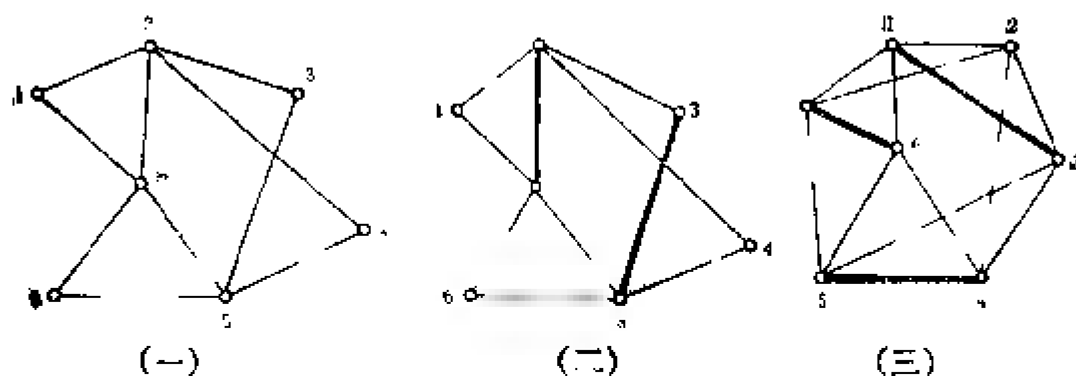
（11）Peterson图是亚哈密顿的。

（12）每个10阶亚哈密顿图均与Peterson图同构。

第十章　并列集（对集）

§1　极大并列集

已给图$G=(X,E)$，在其边集E中，任取子集$M\subseteq E$，使在子集M里，没有二边相邻，这样的边集M，称为图G的**并列集**①。



（一）　（二）　（三）

图　10.1

若在图里，用粗线表示并列集的边，其他的边表以细线，例如图10.1中的（一）是原图，（二）中的二边〔27〕与〔35〕合成一个并列集M_1。（三）中的〔13〕〔45〕〔67〕也构成一个并列集M_2。图G的顶和M中某一边相遇，则这个点，称为关于并列集M的**饱和点**。否则，称为关于M的**非饱和点**。如（二），顶点2、3、5、7都是关于M_1的饱和点，而顶点1、6、4，则是非饱和点。

在图G上，M是它的一个并列集，它的边画以粗线，其他不在并列集M里的边，画以细线，若有链，它的边是粗细交错，则这个链称为关于并列集M的**交错链**。由于并列集的特性，显见交错链都是初级的。就（二）来看，链$\mu_1=$〔12753〕—

①并列集实际上是一个独立的边集，其中任二边相互独立，亦即集合中的边，两两互不相邻。又这样的独立的边集，实际上也是在图G里，取顶，两两配对，一个顶只能和一个顶相配，所以有时也把并列集叫做对集。

是一个交错链，其两个端点，一个是关于M_1的饱和点，一个是非饱和点。又（三）中的μ_2 〔671354〕也是一个交错链，其两个端点都是饱和点。又在（二）中取μ 〔672354〕来看，它也是一个交错链，它的两个端点都是非饱和点，这种交错链，叫做**镶边交错链**。

在图G上，一个圈，它的边是粗细交错的，这个圈便称为关于并列集M的**交错圈**。显见交错圈总是初级的，而且总是偶长的。就图10.1来看，（二）中的μ 〔72357〕是关于M_1的交错圈，（三）中的μ 〔1345671〕是关于并列集M_2的一个交错圈。

在图G上，已给并列集M，就M而言，有交错链与交错圈，在交错链或交错圈上，可以把粗线与细线相互交换，其他的边都不变，这样的运算，叫做一个**交换**，通过交换，可自一个并列集，做得另一个并列集。如图10.1（二），在交错链μ 〔12753〕上进行交换，可自M_1做得新的并列集$M_1'=${〔12〕，〔57〕}。若在交错链〔672354〕上进行交换，由于其两个端点，都是非饱和点，也就是说μ是一个镶边交错链。在其上进行交换，得新并列集{〔67〕,〔23〕,〔54〕}，比原来的并列集多了一边。这个结果，是显而易见的。由于镶边，并列集中细线总比粗线多一条。给定一个并列集，我们就是用这种方法，逐渐将其扩大的。

在交错圈上进行交换，可以将一个并列集改成另一个并列集，但不能增加并列集的边数。

由于图$G=(X,E)$是有限的，边做最多的并列集总存在。这种边数最多的并列集，称为**极大并列集**。已给一个并列集，如何判断它是不是极大呢？为此先研究下面的问题。

已给图$G=(X,E)$，在G上给出两个并列集M_1与M_2，作图

$$H=(X,\ (M_1-M_2)\cup(M_2-M_1)),$$

M_1-M_2表示在M_1里，但不在M_2里的边集，M_2-M_1表示在M_2里但不在M_1里的边集。图H是图G的一个部份图，它的边集是M_1与M_2里，除去公共边之后，所得的边集。

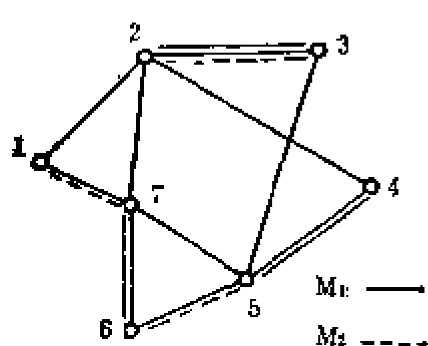
引理10.1 图H（X，（M_1-M_2）∪（M_2-M_1））里顶点的极大次数是2。

证 在图H里，任取顶$x \in X$分以下三种情况来考察顶x的次数：

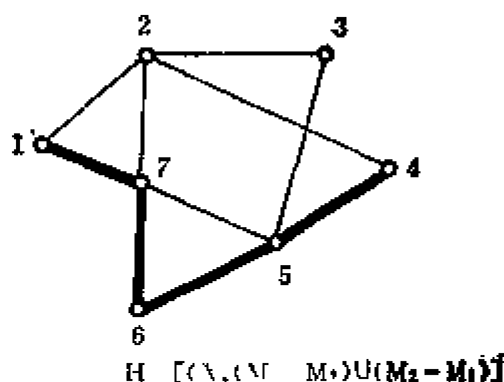
1．$x \notin V(M_1-M_2)$，$x \notin V(M_2-M_1)$。此时，x在图H里的次数是0。

2．$x \in V(M_1-M_2)$，$x \notin V(M_2-M_1)$或$x \notin V(M_1-M_2)$，$x \in V(M_2-M_1)$此时，在图H里，过顶x的，只能有一边，其次数是1。

3．$x \in V(M_1-M_2)$，$x \in V(M_2-M_1)$。此时过顶x的有二边，一属于M_1，一属于M_2故其次是2。



（一）



（二）

图 10.2

在图10.2里，$H=(X$、{〔17〕、〔76〕、〔65〕、〔54〕}），顶2与3是0次的。顶1与顶4是1次，顶6、7与顶5都是2次。

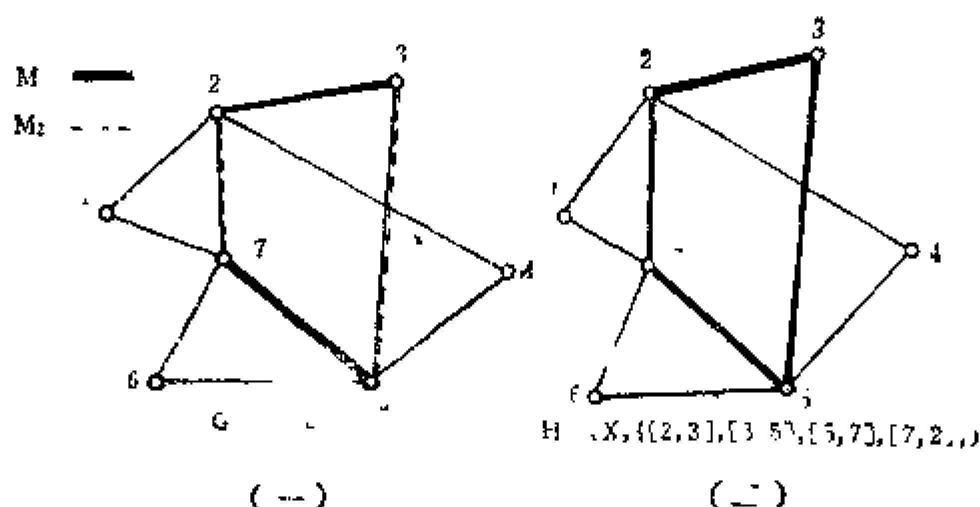


图 10.3

在图10.3里，$H=(X,\{[23],[35],[57],[72]\})$，在图$H$里顶1、4、6都是0次的，顶2、3、5、7，都是2次的。

引理10.2 已给图$G=(X,E)$，在其上作二并列集M_1与M_2，作图$H=(X,\{(M_1-M_2)\cup(M_2-M_1)\})$，则图$H$的分子图是：

①孤立点。

②交错链，其边在M_1与M_2里。当链是奇长时，其两个端点，或者是M_1的两个非饱和点，或者是M_2的两个非饱和点。当链是偶长时，其两个端点，分别是M_1与M_2的非饱和点。

③用M_1与M_2的边构成的偶交错圈。

证 显然。

定理10.1 (Berge，[1957①]) 在图$G=(X,E)$里并列集M是极大的，其充分和必要条件是图G不含关于M的镶边交错链。

证 必要性 定理的必要性是很明显的，否则，在镶边交

① C Berge, Two Theorems in Graph Theory Proc Nat Ac.Sciences, U S A. 43, 1957, 842~44.

错链上进行交换，将扩大并列集M。

充分性　已给并列集M_1满足条件，往证其极大性。在G上任作极大并列集M_2，据本定理的必要性，在图G里不关含于M_2的镶边交错链。

作部份图$H = (X, \{(M_1 - M_2) \cup (M_2 - M_1)\})$，据引理10.2，图$H$不能包含奇长的交错链，故$|M_1| = |M_2|$。由于$|M_2|$是极大的，故$M_1$也极大。　　　　（证毕）

通过定理10.1和它的证明，可得以下几种启示：

1．在图$G = (X, E)$上，已给极大并列集M，通过关于M的交错链或关于M的交错圈，进行交换，必得另一极大并列集。反过来，任给另一极大并列集M'，作部分图$H = (X, \{(M_1 - M_2) \cup (M_2 - M_1)\})$，经过交换，可自$M$推得$M'$。由此可知，只要求得一个极大并列集之后，通过交换，可以推得所有的极大并列集。

2．极大并列集的饱和点是大体固定的。只是某些点，可能是一个极大并列集的饱和点，但是另一个极大并列集的非饱和点。而且同一条边上的两个端点，不可能同是关于某个极大并列集的非饱和点。

3．在图G上任给并列集M，可以从一个非饱和点出发，找镶边交错链，再在链上进行交换，来扩大并列集M，以至达到极大（见下图10.4）。

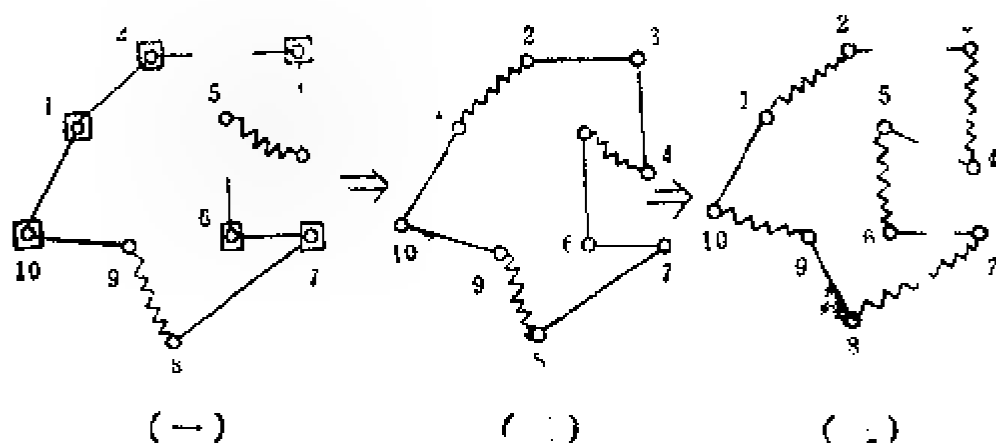


图 10.4

（一）是原图，〔45〕与〔89〕合成一个并列集M。对于M、顶1、2、3、6、7、10都是非饱和点。取边〔1,2〕加进M、再作镶边交错链〔3、4、5、6〕，〔7、8、9、10〕，通过交换，最后得并列集{〔12〕、〔34〕、〔56〕、〔78〕、〔9 10〕}，这是一个极大并列集。

4．也可能有某些点，总是非饱和点，而另一些点，则具有两种可能性。图10.5是一个7阶的完全图K_7再加上三个孤立点8、9、10。K_7上每一点都可以是某一极大并列集的非饱和点，而8、9、10三点总是非饱和点。

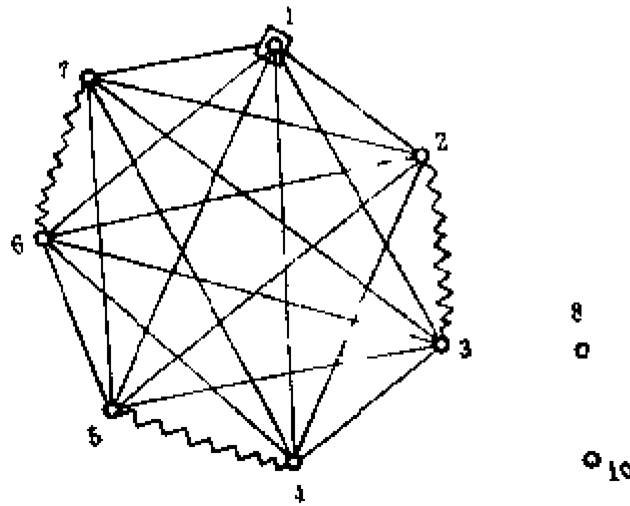


图 10.5

求极大并列集是有其实际意义的。例如：在一个飞机场上有若干架飞机，和若干个驾驶人员。驾驶每架飞机，需要二人，但由于语言的不同，技术的差异等等客观原因，有些人可以同机起飞，有些人则不能同机起飞。问该飞机场最多可以同时起飞多少架飞机？要解决这个问题，可把每个飞行员作为一点，两人可以同机起飞的，用边相联，得一个图。要求同时起飞的最多架飞机，便是去求这个图的极大并列集。

§2 极小覆盖

已给图$G=(X, E)$。要求在边集E里，找一个集合$C\subset E$，使G的每个顶至少在C的一条边上，这个集合C称为图G的

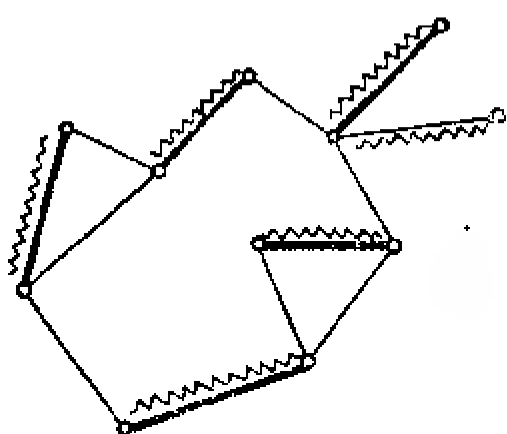


图 10.6

顶的**覆盖集**。其中维数最小的称为**极小覆盖**。

例 图 10.6 共有11个顶，设这些顶是一些重要地点。现在要求安排警卫人员，使在同一条线上的两点，一个人可以同时照顾，问至少须安排多少个警卫？

很明显，这个图的极大并列集（用粗线表示）其维是5，极小覆盖集（用波段线表示），其维是6，二者之和等于图的阶，即5＋6＝11。这个结果是一般性的。即下

定理10.2 (Norman, Rabin, 〔1959①〕)已给单纯图$G=(X, E)$，其阶是n，又设M_0是一个极大并列集，C_0是一个极小覆盖集，则

$$|M_0|+|C_0|=n。$$

证 已给极大并列集M_0，在每一个非饱和点上，增加一边，过这个点，将得覆盖C_1，且显见

$$C_1=M_0\cup\{e_y/y\notin V(M_0)\}。$$

由此，乃有

$$|C_1|=|M_0|+(n-2|M_0|)=n-|M_0|$$

或

$$|C_1|+|M_0|=n。$$

反之，设已给极小覆盖集C_0，保留其若干边，然后连续将和保留的边相邻的边去掉，得并列集M_1。由于在C_0中不可能有长为3的链，每舍去一边，恰好产生一个M_1的非饱和点。故

---

① R Z Norman, M O Rabin An Algorithm for a Minimum Cover of a Graph Proc Amer Math Soc, 10, 1959, 315~319

$$|C_0| + |M_1| = |Y| - 2|M| + n - 2|M_1|,$$

或 $$|C_0| + |M_1| = n。$$

由于M_0的极大与C_0的极小，亦即

$$|C_0| \leqslant |C_1|, \quad |M_1| \leqslant |M_0|,$$

故从 $$|C_0| + |M_1| = |C_1| + |M_0|,$$

可得 $$|C_0| = |C_1|, \quad |M_1| = |M_0|,$$

亦即 $|C_1|$是极小的，M_1是极大的，同时也就有

$$|C_0| + |M_0| = n。$$

（证毕）

§3 两分图上的极大并列集

在第五章§3中我们曾经讲过两分图上的并列集。本章§1，求极大并列集的方法，在两分图上同样适用。

例1 已给两分图$G=(X, Y; E)$及其上一个并列集如下（图10.7），

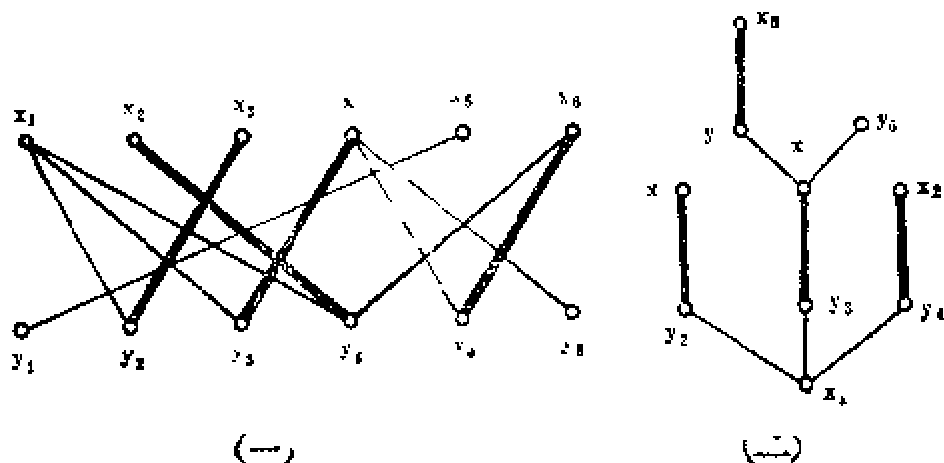


图 10.7

图中粗线，表示一个并列集里的边。现在的问题是检查这个并列集M是否极大，或者如何加以扩大。

首先，看X里是否有点未被M所饱和。比如x_1是非饱和点，自（一）作树（二），$[x_1y_3x_4y_6]$是一个镶边交错链。经过交换，得并列集M'，共含5边，比M多一边。

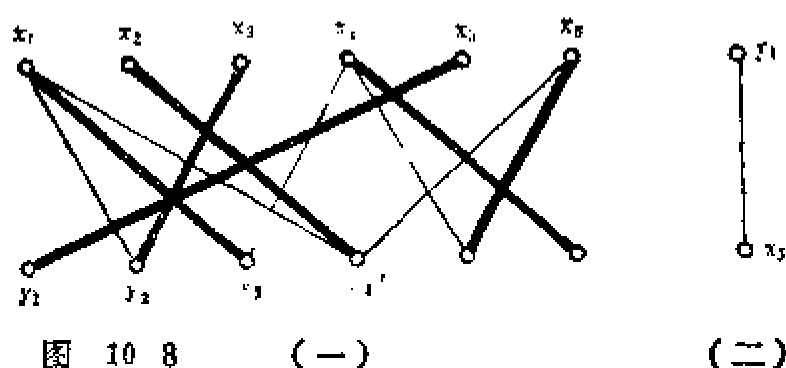


图 10.8　　(一)　　　　(二)

在原图中，检查诸x的点中，还有非饱和点x_5。x_5y_1显然是一个镶边交错链，在并列集中，增加新边x_5y_1，便得一个并列集，饱和了所有的x点，这是一个极大并列集：{[x_1y_3]，[x_2y_4]，[x_3y_2]，[x_4y_6]，[x_5y_1]，[x_6y_5]}。

定理10.2对两分图也同样适用，见上图10.8(一)，此时极大并列集同时也是一个极小覆盖集，二者的维都是6，其和是12，是原图的阶。

定理5.4（König，Egervary定理）是一个很重要的定理。应用第六章网络上流的理论，可将问题化成下面的网络上一个流的问题（图10.9）。一个极大流，实际上在原两分

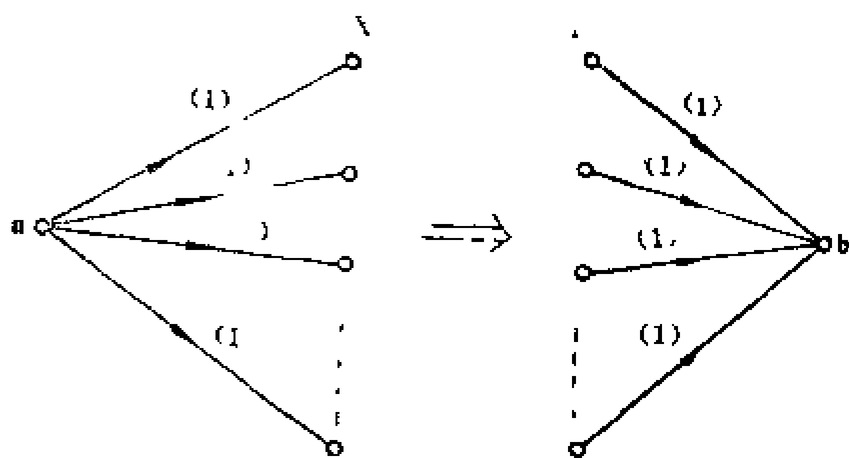


图 10.9

图$G=(X, Y; E)$上确定一个极大并列集。极大流值就是极大并列集的维。控制X到Y一切边的那些顶，实际上是以点为主对边的覆盖（§2的覆盖集是以边为主，对顶的覆盖），

任一边至少有一个端点在这样的覆盖集（顶集的子集）里，这种覆盖集，叫做**径集**（Transversal）。定理5.4用极大并列集的语言来加以叙述，便是

定理10.3（König，Egervary，〔1931①〕）在两分图 $G=(X, Y, E)$ 上，极大并列集的维，等于极小径集的维。

这个定理，在一般的图上是不成立的。例如下图10.10。

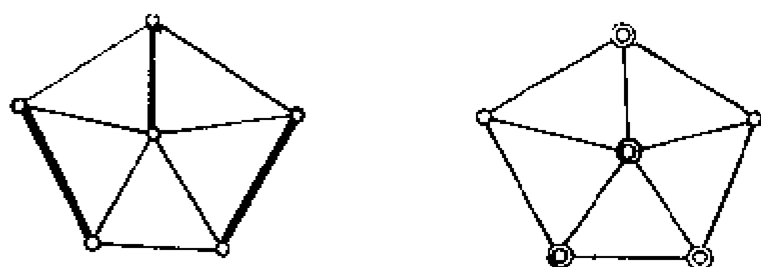


图 10.10

这个图，极大并列集的维是3，极小径集的维是4，二者不相等。对一般图，关于极小径集，有一个和定理10.2相类似的定理（见下第十一章）。

§4 两分图上顶点的配对

已给两分图$G=(X, Y; E)$，要求将X里的顶和Y里的顶配对。当然，一点不能和两点相配，基本上也是一个求极大并列集的问题。例如n个工人要安排到n部机器上工作，但每个工人，对于机器，有些是比较熟悉的，有些是不熟悉的。问题是，是否可能将每个工人安排到他比较熟悉的机器上工作？又如在某个地区，有若干社团，现在要选举代表，问是否可能，每个社团，所选出的代表各不相同，这是著名的所谓

① D König, Graphen und Matrizen

$\max|m|=\min(|X-A|+|\Gamma_G(A)|)\ (A\subset X)$

Mat. Fig Lapok. 38, 1931, 116～119

"相异代表系"的问题。定理6.2（P.Hall，[1934]）解决了这个问题，现在将该定理复述如次：

定理10.4 （P.Hall，[1934*]）已给两分图$G=(X,Y;E)$，顶集X可以在顶集Y上配对的充分和必要条件是

$$|\Gamma_G(A)|\geqslant|A|。\qquad (A\subset X)$$

证 应用极大并列集的概念。设X可以在Y上配对，则图G上极大并列集的维是

$$|M_0|=|X|,$$

而极小径集的维是

$$\min(|X-A|+|\Gamma_G(A)|),\qquad (A\subset X)$$

故据König定理（本章定理10.3），应有

$$|X|=\max_M|M|=\min(|X-A|+|\Gamma_G(A)|)$$

$$=|X|+\min_{A\subset X}(|\Gamma_G(A)|-|A|)。$$

上式成立的充要条件是

$$\min(|\Gamma_G(A)|-|A|)=0,$$

亦即 $|\Gamma_G(A)|\geqslant|A|$ 对一切$A\subset X$均成立。

（证毕）

这个定理的证明方法很多，现在提出一个证法，并将定理的结果予以扩大。

定理10.5 （M.Hall，[1948+]），已给两分图$G=(X,Y;E)$，满足定理10.4的条件，令$|X|=m$，$\min|\Gamma_G(x)|=t>0$（$x\in X$）则X可以在Y上配对，且配对方法的个数，至少是

---

* P Hall, On Representations of Subsets J London Math Soc 10, 1934, 26~30

\+ M Hall, Distinct Representatives of Subsets Bull Am Math Soc, 54, 1948, 922~926

$$r(t,m)=\prod_{1\leq i\leq \min(t,m)}(t+1-i)。$$

证 使用归纳法，对m进行归纳。

设$m=1$，定理显然成立。

设在X中，任选子集合S：$\phi\neq S\neq X$，恒有

$$|\Gamma(S)|>|S|。$$

在X中任意选定一点$x\in X$，且选$y\in\Gamma(x)$，因$t=\min|\Gamma(x)|>0$，这总是可能的。作两分图$G'=(X-x, Y-y; E')$，这个图满足定理在$m-1$，$t-1$时的条件。其配对方法的个数至少是$r(t-1, m-1)$。在每一个配对方法上，加进$[xy]$，便得原图的一个配对方法。故原图配对方法个数至少是

$$t\cdot r(t-1, m-1)\geq r(t,m)。$$

设在X中存在子集S：$\phi\neq S\neq X$，但$|\Gamma(S)|=|S|$，命$s=|S|$则必有$s\geqslant t$及$t<m$，在原图$G(X, Y; E)$中，作二子图$G_1=(S, \Gamma(S); E_1)$与$G_2=(X-S, Y-\Gamma(S); E_2)$，（参看图10、11）$G_1$与$G_2$是互质的，且$G_1$满足条件

$$|\Gamma_{G_1}(S_1)|\geqslant|S_1|，\quad (S_1\subset S)$$

因$\Gamma_{G_1}(S_1)\subset\Gamma_G(S)$，在图$G_2$上，由于在$X-S$中任一点$x_2$，其$\Gamma(x_2)$中至少有一点在$Y-\Gamma(S)$中，故可取与$t$相应的$t_2$，

$$t_2=\max\{t-s, 1\}，$$

则G_2也满足条件

$$|\Gamma_{G_2}(S_2)|\geqslant|S_2|，\quad (S_2\subset X-S_1)$$

否则将有 $|\Gamma_G(S_1\cup S_2)|<|S_1\cup S_2|$。

这是矛盾。

据归纳假设，定理对于G_1与G_2均应成立，故在图G上X在Y上配对方法的个数至少是

$$r(t_1, s)\cdot r(t_2, m-s)\geqslant r(t,m)。\text{（证毕）}$$

$$
\begin{array}{lll}
 & X & Y \\
G: \begin{cases} G_1: & \{S & \Gamma(S)\} \\ G_2: & \{X-S & Y-\Gamma(S)\} \end{cases}
\end{array}
$$

图 10.11

定理10.4一般称为寇尼希—霍尔定理。此外，还有很多定理说明，在定理10.4之下，两分图 $G=(X, Y; E)$满足另一些条件，使X可以在Y上配对。这里就不详细论述，读者可参看：

1、C.Berge: Graphs and Hypergraphs. 英文版pp: 134～136.

2、O.Ore, Graphs and Matching Theorems, Duke Math.J.22, 1955, 625～639.

若写出两分图的结合矩阵

$$
\begin{array}{cc}
 & y_1 y_2 \cdots y_n \\
\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{array} & (0,1)
\end{array}
$$

两分图的极小径集，便是这个（0，1）矩阵里极少的行和列的个数，含尽所有的“1”，极大并列集，便是不同行不同列的最多的“1”的个数。将定理10.4译成矩阵语言，便是：

在一个（0，1）矩阵里，含尽所有的“1”的极少线数（所谓线指行和列）等于矩阵里不同行不同列的“1”的极大个数。

这个数，一般叫做（0，1）矩阵的**项秩**(term rank)。参看：

H.J.Ryser: Combinatorial mathematics, pp55～59.

现在再提出一个问题，即若定理10.4的条件不满足，在两分图$G=(X, Y; E)$上，当然就不可能有极大并列集，饱和所有的顶x($x\in X$)。那么它的极大并列集，能饱和X的多少顶

呢？于此有下

定理10.6 （Ore，〔1955*〕见上）已给两分图 $G=(X,Y;E)$，设

$$d=\max\{|S|-|\Gamma_G(S)|\}, \quad (S\subset X)$$

则 $\qquad \beta(G)=m-d$，

其中β表示极大并列集的维。

证 作新的两分图H，使（1）在顶集Y上增加d个新点，（2）自每个新点到X的每一点联边。则关于两分图H，条件

$$|\Gamma_H(S)|-|S|\geqslant 0 \qquad (S\subset X)$$

是成立的。故在两分图H上，有并列集，这个并列集最多有d条边不属于原来的两分图G，故

$$\beta(G)\geqslant m-d,$$

亦即有极大并列集，最多不饱和X的d个点。但在X中，确存在$S\subset X$，使$|S|=d+|\Gamma_G(S)|$，故G的任一并列集，至少将不能饱和S中的d个点。故

$$\beta(G)\leqslant m-d,$$

于是 $\qquad \beta(G)=m-d$。

（证毕）

例1 舞会问题 这是一个古典问题。设在一个学校里，每个男生认识k个女生，每个女生认识k个男生，问在一次舞会上，是否可使相识的男女共同起舞？

解 将男生作为点集X，女生作为点集Y，相识的男女之间联线，作出两分图$G=(X,Y;E)$。显见$|\Gamma_G(x)|=k=|\Gamma_G(y)|$。其中$x\in X$，$y\in Y$，在$X$中任取子集$S\subset X$。$S$个男生共认识$k\cdot|S|$个女生，但每个女生，最多只认识$k$个男生，故$|\Gamma_G(S)|$至少是$|S|$。亦即条件$|\Gamma_G(S)|\geqslant|S|$恒能成立。据定理10.4，相识的男女生共同起舞是可能的。

例2 工人安排问题 如在本节一开始所讲的，设有n个工人，安排在n部机器上工作，每个工人熟悉某些机器但不熟悉另

一些机器，问是否可能将每个工人安排在他所熟悉的机器上工作？

解 取n个工人x_1，x_2，…，x_n做为集合X，n部机器y_1，y_2，…，y_n做为集合Y，作两分图，x_i熟习机器y_j便联边$x_i y_j$，据定理10.4,仍应验证其充分和必要条件。但在具体工作中，可用§3例中所用的方法，先任取两分图的一个并列集，再逐次扩大这个并列集，最后可以判断是否可能，求得一个满意的安排方法。如果不可能，则得一极大并列集，求得一个比较好的方法。在满意的情况下，据定理10.5,其不同的安排方法，可有多种。

§5 最优安排问题

本节将提出另一个安排问题。设有n个工人安排去完成n个不同的工作。每个工人完成每种工作其效果是已知的。问如何安排使总的效果达到极大。这就是本节讲的最优安排问题。

每个工人，可以安排去完成每种工作共有$n!$个不同的安排方法。每一种安排有一个总效果，最优效果，便是这$n!$个效果中最大的一个。这样安排，当然很不方便，且当n相当大时几乎不可能。下面将给出一个较简便的方法。

和上节的问题一样，作一完全两分图，并在每一边上标出某个工人完成某项工作的效率，得一个所谓加权的两分图G。在这个加权两分图的顶集上定义函数$l(z)$，使

$$l(x)+l(y)\geqslant w(x,y)\ \text{对一切边均成立}$$

其中$w(x,y)$为边$[x,y]$上的权，x,y是其二顶$x\in X$，$y\in Y$。这样的函数总是存在的。因总可取

$$l(x)=\max_{y\in Y} w(x,y) \qquad (x\in X)$$

$$l(y)=0 \qquad (y\in Y)$$

把这个函数叫做顶集上的可行性标号。

在原给的加权两分图上，找出所有的边，在其上有

$$l(x)+l(y)=w(x,y)$$

的，构成一个部份图G_l，在这个部份图G_l里，找极大并列集。于此有下

定理10.7 设l是加权两分图G上的可行性标号，G_l是如上所讲的部份图，如G_l的极大并列集M^*饱和所有的顶，则M^*的边便代表一个最优安排。

证 $w(M^*)=\sum\limits_{e\in M^*}w(e)=\sum\limits_{v\in V}l(v)\quad (V=V(G))$，

命M是任一并列集，也饱和所有的顶点，则M的边也代表一个安排，但据G_l的确定，知恒有

$$w(M)=\sum_{e\in M}w(e)\leq\sum_{v\in V}l(v),$$

故恒有 $w(M^*)\geqslant w(M)$。

（证毕）

若G_l里没有极大并列集，饱和所有的顶，可改换l为$\hat{l}$（即作调整，见后）同样作$G_{\hat{l}}$。此时$G_{\hat{l}}$里的边数加多，有可能出现极大并列集，饱和所有的顶点，此时便已得安排。为了使这个方法，更加清楚，举例说明如次：

设有5个人，进行5种工作，其效果如下矩阵所示：

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	3	5	5	4	1
x_2	2	2	0	2	2
x_3	0	4	4	1	0
x_4	0	1	1	0	0
x_5	1	2	1	3	3

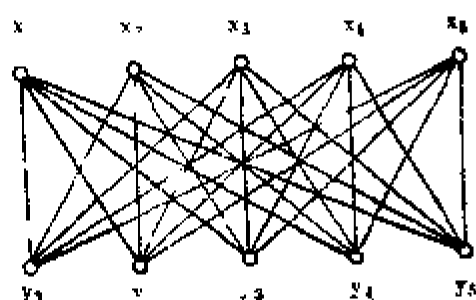


图 10.12 （一）

矩阵的元素a_{ij}表示x_i完成y_j的效果。作出完全两分图如

图10.12（一）。

按照上面的说法，先确定函数$l(z)$，使

$$l(x_i)=\max_{y\in Y} w(x_i, y), \quad l(y_j)=0$$

$$(x_i\in X, y_j\in Y)$$

将这些值记在矩阵的右面和下面：

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
x_1	3	5	5	4	1	5
x_2	2	2	0	2	2	2
x_3	0	4	4	1	0	4
x_4	0	1	1	0	0	1
x_5	1	2	1	3	3	3
	0	0	0	0	0	

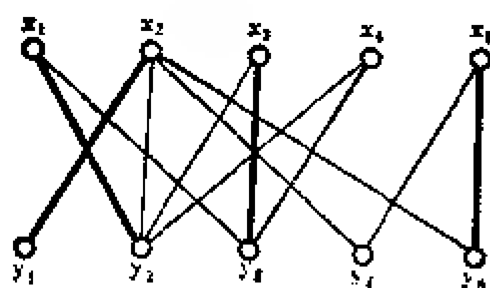


图 10.12 （二）

相应的相等部份图画在下边如（二），其中$l(x)+l(y)=w(x,y)$的边在矩阵里用虚点方框标出。相等部份图显无饱和所有顶点的极大并列集。

现在进行调整，即将某些$l(x)$变小，某些相应的$l(y_j)$变大，目的在增加相等部份图里边的个数。将$l(x_1)$改成4，欲顶x_1上所取用的边不减少，$l(y_2)$与$l(y_3)$便相应增成

1，$l(x_3)$与(x_4)各相应地减1，得下矩阵及其相应的相等部份图。

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
x_1	3	5	5	4	1	4
x_2	2	2	0	2	2	2
x_3	0	4	4	1	0	3
x_4	0	1	1	0	0	0
x_5	1	2	1	3	3	3
	0	1	1	0	0	

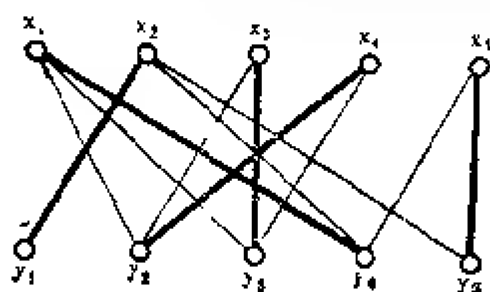


图 10 12 (二)

在相应的相等部份图里，存在极大并列集，饱和所有的顶点。最优安排是

$$\{[x_1y_4],[x_2y_1],[x_3y_3],[x_4y_2],[x_5y_5]\},$$

其总的最优效果是4 + 2 + 4 + 1 + 3 14。

同样$\{[x_1y_4],[x_2y_1],[x_3y_2],[x_4y_3],[x_5y_5]\}$也是一个最优安排。

这个问题，实际上是在$n\times n$型非负矩阵里求n个元素，各各不同行不同列，使其和达到极大。假使原给n部机器，完成n项产品，要使总的耗电量达到极小，除作耗电量矩阵A外，再

任作一个$n\times n$型非负矩阵B，取$A'=B-A$，按上法，求出矩体A'里相应的极大，使得最优安排。

§6 完美并列集

已给单纯图$G=(X,E)$。现在来研究在G上能否存在并列集，饱和G的所有顶点。假使有这样的并列集存在，这个并列集当然是极大的，叫做原图的**完美并列集**。在图论里特别把这样的并列集，叫做图的**1—因子**。一般，在图G里，存在（跨顶的）k次正规部份图，叫做原图的k—**因子**。

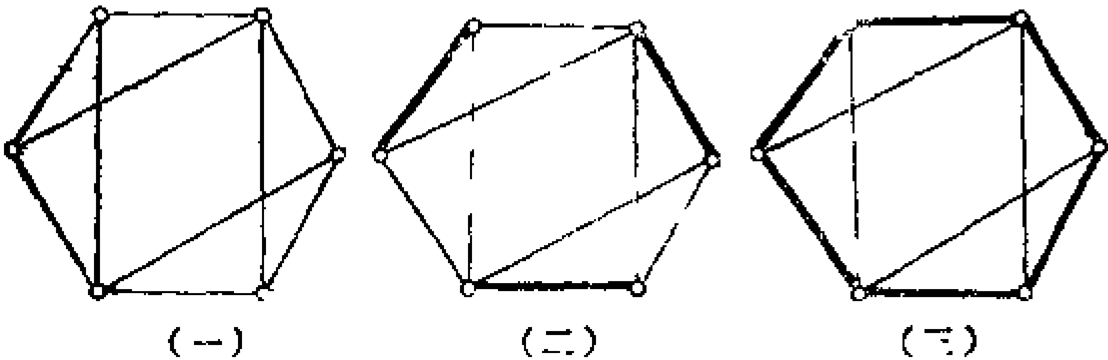
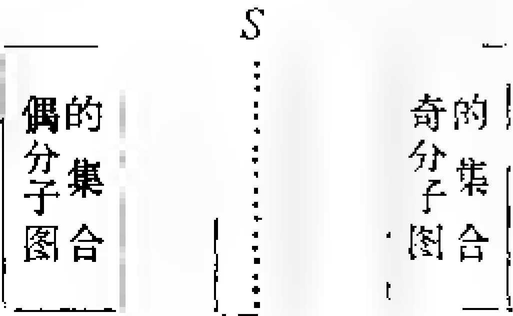


图 10.13

在图10.13中，（一）是原图。（二）表示一个1—因子，其中粗线表示图G的一个完美并列集。（三）表示图G的一个2—因子。

假使图G有完美并列集。自原图的顶集$V(G)$任意去掉一个子集$S\subset V(G)$，得图$G-S$，这个图分成若干个联接的分子图，其中有些是含偶数个顶的，也有一些是含奇数个顶的。这些奇分子图的个数记为$q(G-S)$。很明显$q(G-S)\leqslant|S|$，



因在$q(G-S)$个奇分子图中，每个分子图里，至少有一个顶，其配对的顶，含在S内，故$q(G-S)\leqslant|S|$。可以惊异的是这个必要条件也是充分的。这便是下面所要叙述的Tutte定理。Tutte定理的证明方法很多，这里，采用的是Mader*的证法。

定理10.8 （Tutte，〔1947**〕）单纯图$G=(X, E)$有完美并列集（1—因子）的充分和必要条件是

$$q(G-S)\leqslant|S| \qquad (S\subset X)$$

其中$q(G-S)$是图$G-S$中奇分子图的个数。

证 必要性 此定理的必要性，如上述是很明显的。

充分性 充分性的证明，使用归纳法，对图的阶$|G|=n$进行归纳。当$|G|=0$，无可证者。当$|G|>0$，假定阶$<|G|$的图，定理都成立。设S_0是$V(G)=X$里的极大子集，使

$$q(G-S_0)=|S_0|。$$

若$S_0=\phi$，则G只含偶分子图，自G任意去掉一顶x，$G-x$至少将有一个奇分子图。但据假设的条件，$G-x$也只能有一个奇分子图，故

$$q(G-x)=|\{x\}|,$$

这和$S_0=\phi$的极大性相矛盾，故$S_0=\phi$不能成立。

现在可以假定有$S_0\neq\phi$，使$q(G-S_0)=|S_0|$，设$|S_0|=m\geqslant1$，$G-S_0$的m个奇分子图是$C_1, C_2, \cdots, C_m$，偶分子图是$D_1, D_2, \cdots, D_k$。在偶分子图中，任取D_j（$j=1, 2, \cdots, k$），在D_j中，任取顶集的一个子集T_j，据定理假设，应有

$$q(D_j-T_j)+q(G-S_0)\leqslant|T_j\cup S_0|=|T_j|+|S_0|$$

---

* Mader W Grad und lokaler Zusammenhang in endlichen Graphen Ann 205(1973) 9～11

** Tutte, W T. The factorization of linear graphs. J London Math. Soc 22(1947)107～111

故　　$q(D_i - T_i) \leqslant |T_i|$，

即偶分子图D_i满足定理的条件。据归纳假设，D_i有完美并列集，因而每个偶分子图都有完美并列集。

任取奇分子图C_i，设记为C，在其中任取一点c，往证$C-c=C'$必有完美并列集。否则据归纳假设，C'将不满足定理的条件，即在C'内将存在子集S使

$$q(C'-S) > |S|。$$

但当计算C'所含顶点个数的奇偶性时，在$C'-S$的每个奇分子图中，取出一顶与S所含的顶合在一起，则因那些分子图（$C'-S$的分子图）所剩下的顶点个数都是偶数，原来的偶分子图其顶数也是偶数，而$|C'|$本身是偶数。

故　　$q(C'-S)+|S| \equiv |C'| \equiv 0$（模2），

因而　　$q(C'-S) \geqslant |S|+2$。

于是有（据定理假设）

$$|S_0|+1+|S| \geqslant q(G-(S_0\cup\{C\}\cup S))$$
$$= q(G-S_0)-1+q(C'-S) \geqslant |S_0|+1+|S|，$$

即　　$q(G-(S_0\cup\{C\}\cup S)) = |S_0|+1+|S|$

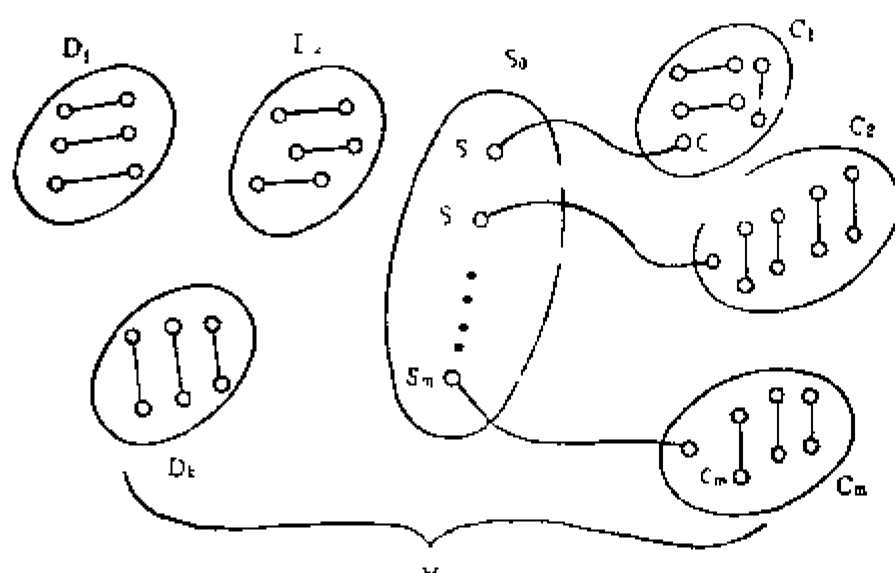


图　10.14

但$|S_0|+1+|S|$确大于$|S_0|$,这和$|S_0|$的极大性相矛盾。故在$G-S_0$的每个奇分子图C_i($i=1,2,\cdots,m$)中各任取一点c_i,每个C_i-c_i均有完美并列集。

作两分图H,命其一个顶点集为$X=\{C_1,C_2,\cdots,C_m\}$另一个顶点集为$Y=S_0$,注意到C_i与D_j都是联结分子图,

故$\Gamma_G(C_i)\cap S_0\neq\phi$。

设$\Gamma_G(C_i)\cap S_0=\{S_{i1},S_{i2},\cdots\}$,使自顶$C_i$到这些点$S_{i1}$,$S_{i2}$,…等联边。在两分图$H$里任取子集$A\subset X$,令$B=\Gamma_H(A)\subset Y$。由于$B\subset Y=S_0$及$S_0$的极大性,故

$$q(G-B)\leqslant|B|,$$

又因$B=\Gamma_H(A)$,$G-B$中至少含A所代表的那些奇分子图。

故 $$|A|\leqslant q(G-B)。$$

故在两分图H上,有

$$|A|\leqslant q(G-B)\leqslant|B|,$$

即 $$|A|\leqslant|B|\quad(A\subset X)$$

能成立,据定理10.4,H有完美并列集,就是$\{s_1C_1,s_2C_2,\cdots,s_mC_m\}$,加上分子图$D_j$的完美并列集,再加上$C-C_i$的完美并列集,便得$G$的一个完美并列集,参看图10.14。

(证毕)

设定理10.7的条件不满足,即若

$$q(G-S)\leqslant|S|,\qquad(S\subset V(G))$$

不能对一切$S\subset X$均成立,则在$X=V(G)$中,将存在子集S,使$q(G-S)-|S|$达到极大,命这个极大为d,即

$$d=\max\{q(G-S)-|S|\},\quad(S\subset X=V(G))$$

则在这里,有和定理10.6相类似的定理

定理10.9 (Berge,〔1958①〕)已给单纯图$G=(X,E)$,其

① Berge,C Sur le couplage maximum d' un graphe, C.R.Acad.Sci paris, 247(1958)258~259

阶为n，且$d = \max\{q(G-S) - |S|\}$　　$(S\subset X)$
则G的顶点、被并列集饱和的、其个数最多是$n-d$。

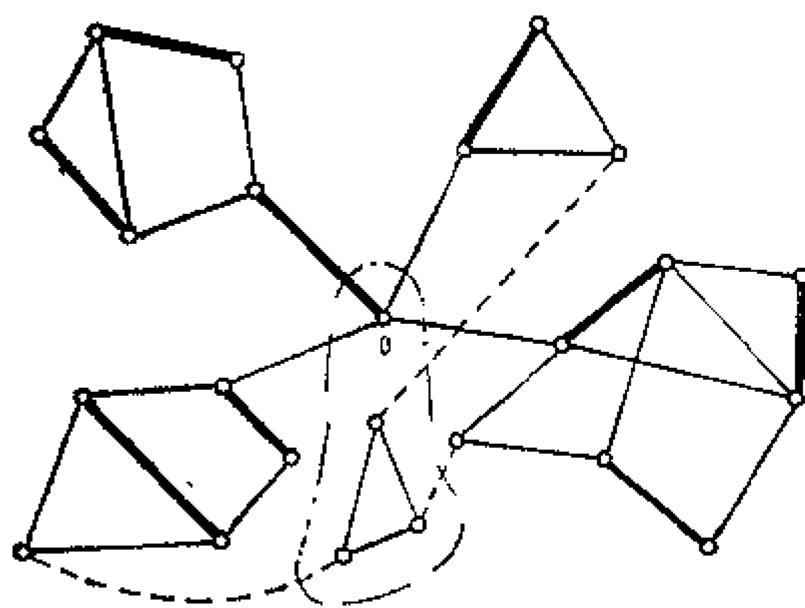
证　和证明定理 0.6一样，作新图

$$H = G + K_d。$$

在图H里任取点集S_H，若S_H不含K_d里的d个点，则$H - S_H$是联接的，设其为奇阶的图，则$q(H-S_H) = 1 \leqslant |S_H|$，若$S_H$包含所有$K_d$中的点，则

$$S_H = S\cup V(K_d)。\qquad S\subset V(G)$$

$H-S_H = G-S$，故$q(H-S_H) = q(G-S) \leqslant |S| + |V(K_d)|$故图$H = G+K_d$满足定理10.8的条件，据定理10.8，$H$有完美并列集，这个完美并列集，其在原图$G$里的边最多不饱和$G$的$d$个顶点，故　$2\beta \geqslant n - d$。



$q(G-0) = 4$

$4 - |\{0\}| = 3$，$\beta = 9$

$2\beta = 18 = 21 - 3$

图 10.5

但图G中确存在子集S使

$$d=\max\{q(G-S)-|S|\}$$

故据定理10.8的证，在图H里去掉顶集$S\cup V(K_d)$时，$G-S$ $H-\{S\cup V(K_d)\}$中，确有G的d个奇分子图与$S\cup V(K_d)$中的d个点的相应。故

$$2\beta\leqslant n-d,$$

于是 $$2\beta=n-d。$$

（证毕）

分析定理10.9中所含的数据，有

（1）图G的维$n=|G|$，

（2）图G所含极大并列集M的维$|M|=\beta$，

（3）$V(G)$所含子集S的维$|S|=s$，这个子集S使$q(G-S)$达到极大。

（4）与（3）中的子集S相应的$G-S$中所含奇分子图的个数q。

这四个数据，据定理10.9，有下关系：

$$2\beta=n-d=n-q+s,$$

或 （a）$q=n+s-2\beta$

这四个数据，还应满足下二关系：

（b）$\beta\leqslant n/2$，这是很明显的。

（c）$s\leqslant\beta$，由于q个奇分子图，每个至少包含一顶，故$n\geqslant s+q$，或$n\geqslant n+2s-2\beta$即$s\leqslant\beta$。

一个图G，给定它的阶为n。设G满足某些已给的条件，这些图，构成一个图类。在这类图里，边数$E(G)$最大的，称为**极大图**。根据上面所研究的几个数据，若已给n，作为图G的阶，β作为图的极大并列集的维，s作为那个特定子集$S\subset V(G)$的维：$|S|=s$，q作为$G-S$所含奇分子图的个数，只须这四个数据满足关系(a)，(b)，(c)，便有图G，取n，β，q，s作

为其相应的数据。由于恒有 $\binom{n}{2} \geq \binom{n_1}{2} + \binom{n_2}{2}$，($n = n_1 + n_2$)，故若欲求极大图，可先将 $G-S$ 中的偶分子图，全部并入奇分子图中。在子集 S 上作 K_s，在每个奇分子图上，也各作出完全图 K_{2n_i+1}（$i=1,2,\cdots,m$），再自 K_s 的每个顶，联到每个奇分子图的每个顶，但奇分子图之间，则不联边。这便是下

定理10.10 取 n 为阶，β 为其极大并列集的维，$S\subset V(G)$ 使 $G-S$ 中所含奇分子图的个数为 q，且使 $q(G-S)-|S|$ 达到极大，令 $|S|=s$，而 n，q，β，s 满足下列关系：

(a) $q=n+s-2\beta$,

(b) $s\leqslant\beta\leqslant n/2$,

则极大图 G，满足上述要求的，必是下述形式：

$$G=K_s+\bigcup_{i=1}^{q}K_{2n_i+1}$$

其中 $$\sum_{i=1}^{q}(2n_i+1)=n-s$$

证 显然。

由此，便甚易推得：

定理10.11 (Erdős, Gallai, [1961*]) 已给二非负整数 n，β，$n\geqslant 2\beta$，则极大图 G，以 n 为阶，以 β 为极大并列集的维，其极大边数是

1. $\binom{2\beta}{2}$ 当 $n=2\beta$

---

*Erdős, P and Gallai, T, On the minimal number of vertices representing the edges of a graph, Publ Math Inst Hungar Acad Sci 6 (1961) 181~203

On Maximal Paths and Circuits of Graphs, Acta Math Acad Sci Hungar, 10 (1959), 337~356

2. $\max\left\{\binom{2\beta+1}{2}, \binom{\beta}{2}+\beta(n-\beta)\right\}$ 当$n>2\beta$

(i) 当$2\beta+1\leqslant n<(5\beta+3)/2$，$K_{2\beta+1}\cup E^{*}_{n-2\beta-1}$是唯一的极大图，其边数是$\binom{2\beta+1}{2}$。

(ii) 当$n>(5\beta+3)/2$ $K_{\beta}+E_{n-\beta}$是唯一的极大图，其边数是$\binom{\beta}{2}+\beta(n-\beta)$。

(iii) 如$n=(5\beta+3)/2$，则有二极大图，$K_{2\beta+1}\cup E_{n-2\beta-1}$与$K_{\beta}+E_{n-\beta}$，其边数为$\beta(2\beta+1)$。

证 据定理10.10，极大图G，必具形式

$$G=K_s+\bigcup_{1}^{q}K_{n_i+1}$$

其中$q=n+s-2\beta$，$0\leqslant s\leqslant\beta$，$\sum_{1}^{q}(2n_i+1)=n-s$。

计算图G所含的边数有

$$|E(G)|=\binom{s}{2}+s(n-s)+\sum_{1}^{q}\binom{2n_i+1}{2},$$

故 $$|E(G)|\leqslant\binom{s}{2}+s(n-s)+2(\beta-s)^2+(\beta-s),$$

令 $$\varphi(s)=\binom{s}{2}+s(n-s)+2(\beta-s)^2+(\beta-s),$$

由于$\varphi''(s)=3>0$，$\varphi'(s)$为升函数，故知$\varphi(s)$在$[0,\beta]$上的最大值只能在其端点上达到，即最大边数为$\max\{\varphi(0),\varphi(\beta)\}$。但$\varphi(0)=2\beta^2+\beta$，达到此边数的图为$K_{2\beta+1}\cup E_{n-(2\beta+1)}$；$\varphi(\beta)=\binom{\beta}{2}+\beta(n-\beta)$，达到此边数的图为

---

* E_n表示K_n的补图，即具n个孤点而没有边的图。令$G\cup H$为以G与H的顶点集及边集的并集为顶点集及边集的图。

$K_\beta+E_{n-\beta}$。又由$\varphi(0)$ $\varphi(\beta)$求出：$n=\frac{5\beta+3}{2}$；$\varphi(0)<\varphi(\beta)$导出$n>\frac{5\beta+3}{2}$；$\varphi(0)>\varphi(\beta)$求出$n<\frac{5\beta+3}{2}$。

故定理得证。

（证毕）

例 已给$n=9$，$\beta=3$，求极大图。

解 求得q $3+s$，$0\leqslant s\leqslant 3$。

现在再分以下各种情况来进行研究。

1．$s=0$，$q=3$，图G是3个奇分子图之合。

$$G\ \ K_{2n_1+1}\cup K_{2n_2+1}\cup K_{2n_3+1},$$

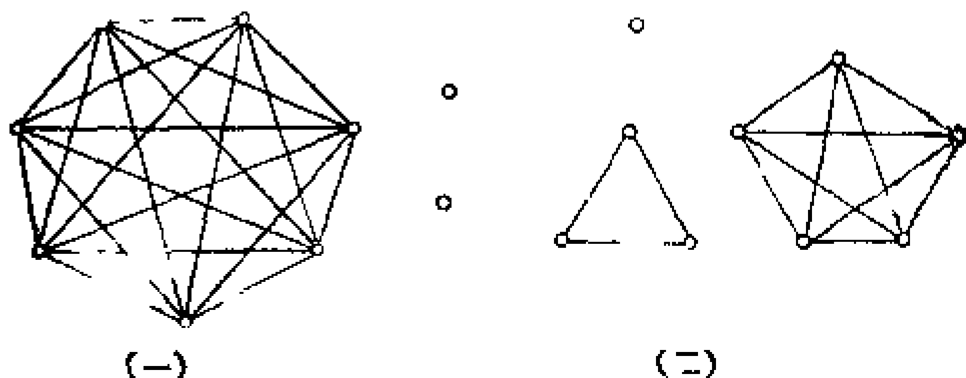
其中$(2n_1+1)+(2n_2+1)+(2n_3+1)$ 9，

这是对n_1，n_2，n_3的一个不定方程求其整数解：

$$\begin{cases}2n_1+1 & 1\\ 2n_2+1=1\\ 2n_3+1=7\end{cases}\qquad\begin{cases}2n_1+1=1\\ 2n_2+1=3\\ 2n_3+1=5\end{cases}\qquad\begin{cases}2n_1+1 & 3\\ 2n_2+1=3\\ 2n_3+1=3\end{cases}$$

相应的图是$K_0\bigcup_1^3 K_{2n_i+1}$解第一组方程，得$n_1=n_2=0$，$n_3=3$相应的边数是21。

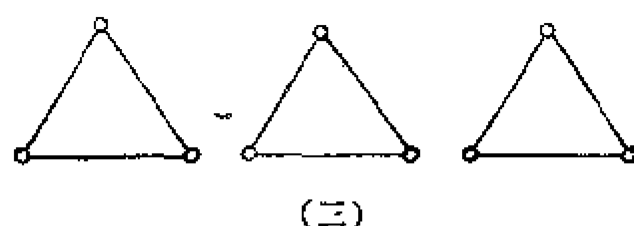
第二组方程的解是（$n_1=0$，$n_2=1$，$n_3=2$），下如图其边数是13。



（一）　　　　（二）

图 .0 1ь

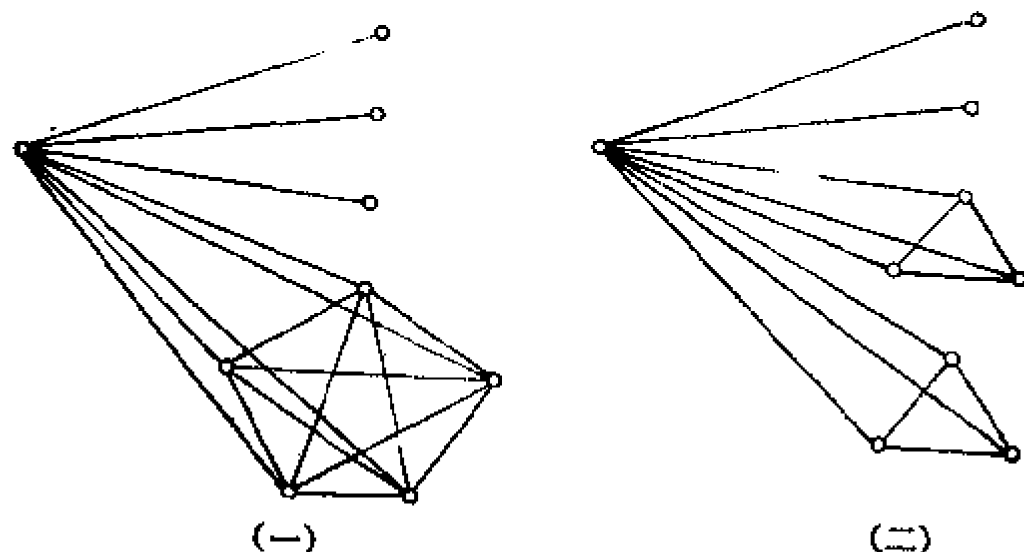
第三组方程的解是（n_1 n_2 n_3 1），图如下（三），其边数是9。



（三）

图 10.16

2. $s=1$，$q=3+1$ 4，解不定方程$k_1+k_2+k_3+k_4=8$其中k_i统为正奇数，共有二组解（1，1，1，5）与（1，1，3，3），相应的图，如下图10.17（一）与（二），相应的边数分别是18与14。



（一） （二）

图 10.17

3. $s=2$，$q=3+2=5$，解不定方程$k_1+k_2+k_3+k_4+k_5=7$，正奇数解是(1，1，1，1，3)，相应的图如下图10.18相应的边数是18。

4. $s=3$，$q=3+3=6$ 相应的图是图10.19，相应的边数是21。

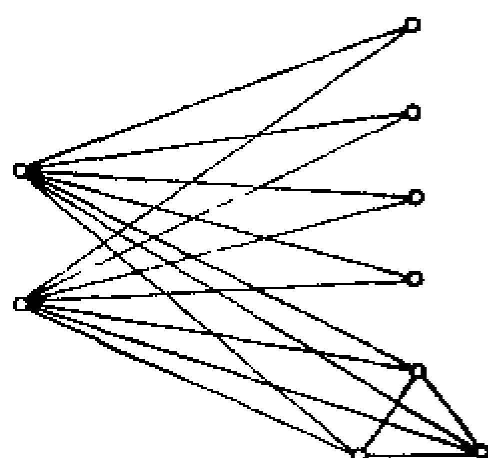


图 10.18

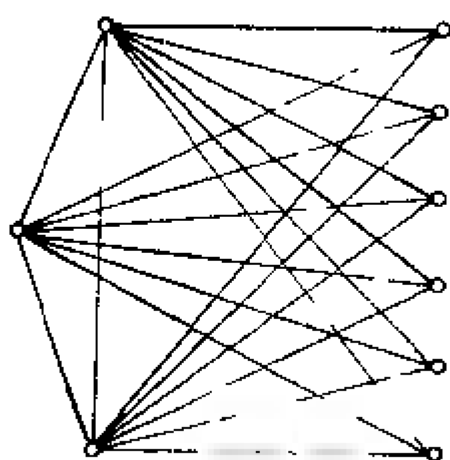


图 10.19

在本例$n=\dfrac{5\beta+3}{2}=9$，极大图有：

（1）$K_7 \cup E_2$，　　　（2）K_3+E_6

习　题

1、图$G=(X, E)$中的边e称为是自由的，如果它属于某个极大并列集，但不属于所有的极大并列集。试证明：边e是自由的，当且仅当对任一个极大并列集M，或者边e属于一个偶长的以不饱和点为一个起点的交错链，或者e属于一个交错圈。

2、试证明：如果M_1与M_2都是单纯图$G=(X, E)$的极大并列集，则$|M_1|=|M_2|$。

3、试证明：如果单纯图$G=(X, E)$中每点的次数均不小于2，则G的极大并列集不唯一。

4、试证明：任给单纯图G的一个并列集M_0，恒可用关于交错链的交换而求出一个极大并列集。试描述这个算法。

5、试证明：树最多有一个完美并列集。

6、对于$k>1$，找出一个无完美并列集的k次正则单纯图的例子。

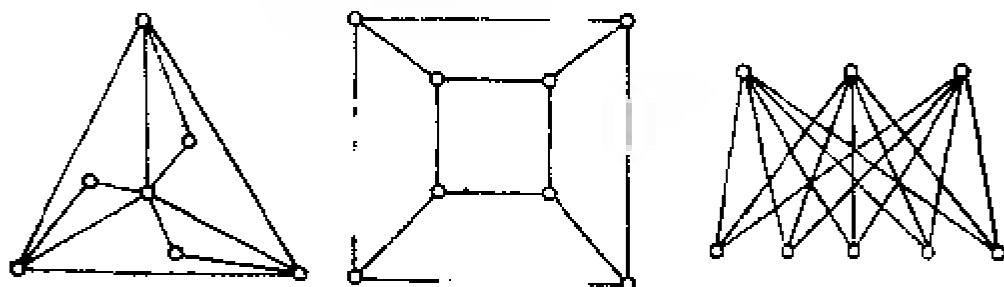
7、试求完全两分图$K_{n,n}$中不同的完美并列集的个数。

8、试证明完全图K_{2n}中不同的完美并列集的个数是$(2n)!/2^n n!$

9、两个人在图上进行博奕，方法是交替选择不同的顶点x_0，x_1，x_2，…，

使得当$i>0$时，x_i都和x_{i-1}相邻。最后一个能选择顶点的人为胜利者。试证明：第一个人有取胜的策略的充分必要条件是G中没有完美并列集。

10、图$G=(X, E)$的k−因子指的是图G的k次正则跨历部分图。如果图$G=(X, E)$有边互质的k−因子$H_1, H_2, \cdots, H_l$，使得$E=E(H_1)\cup E(H_2)\cup\cdots\cup E(H_l)$，则称$G$为$k$−因子化的，且将$G$表示成$H_1\cup H_2\cup\cdots\cup H_l$，称此表示为G的$k$−因子分解，试证明 $K_{n,n}$与K_{2n}是1−因子化的，而Peterson图不是1−因子化的。又问下列各图有2−因子吗？



11、试证明：如单纯图$G=(X, E)$中$|X|=2k$，且其极小次数$\delta\geq k+1$，则G有3−因子。

12、试证明 K_{2n+1}可表为n个连结的2−因子的并集（$n\geq 1$）。

13、试证明：（1）K_{6n-2}是3−因子化的；（2）K_{4n+1}对$n>1$是4−因子化的。

14、试证明：用1×2的方块恰好复盖割去两个对角块的8×8的方块是不可能的。

15、试证明，在两分图$G=(X, Y; E)$中存在完美并列集的充要条件是对一切$S\subset X\cup Y$，有$|\Gamma(S)|\geq|S|$。其中$\Gamma(S)$表示与S中的点相邻的点集。又给出一个例子说明如G不是两分图，则此论断不真。

16、对$k>0$试证明：（1）每个k−次正则的两分图都是1−因子化的；（2）每个$2k$−次正则图都是2−因子化的。

17、非负实矩阵Q，如其每一行中元素的和是1而且每列中元素的和也是1，则称为双随机矩阵。置换矩阵是（0，1）−矩阵，而且其每行每列都恰有一个1（因而每个置换矩阵都是双随机的。）试证明：（1）每个双随机矩阵必然是方阵。（2）每个双随机矩阵Q均可表为置换矩阵的凸线性组合。即$Q=c_1P_1+c_2P_2+\cdots+c_kP_k$，其中每个$c_i$都为非负实数，每个$P_i$均为置换矩阵，且$\sum_{i=1}^{k}c_i=1$

18 设H是有限群，K是H的子群。试证明存在元素$h_1, h_2, \cdots, h_n \in H$，使得$h_1K, h_2K, \cdots, h_nK$是$K$的不同的左陪集，$Kh_1, Kh_2, \cdots, Kh_n$是$K$的不同的右陪集。

19、试证明：每一个没有断边（除去此边，则图G被切断）的3次正则图，均有完美并列集。

20、试证明：若单纯图$G=(X, E)$中$|X|=$偶数，且G是$(k-1)$边联的k次正则图，则G有完美并列集。

21、试证明：如单纯图$G=(X, E)$中$|X|=$偶数，且G是k次正则k联的图，则G有完美并列集。

22、试证明：树$G=(X, E)$有完美并列集的充分必要条件是$q(G-x)=1$对一切$x\in X$成立。

23、利用§6定理10.8描写无完美并列集的极大单纯图的特性。又证明：如果$G=(X, E)$是单纯图，$|X|=2k$，且最小次数$\delta<k$，$|E|>\binom{\delta}{2}+\binom{n-2\delta-1}{2}+\delta(n-\delta)$，则$G$有完美并列集。

24、下述结论对吗？为什么？（1）每一个径集均含有一个极小径集。（2）每一个并列集均含于一个极大并列集之中。

25、在两分图$G=(X,Y,E)$中，对$A\subset X$令$\delta(A)=|A|-|\Gamma_G(A)|$，$\delta_0=\max\limits_{A\subset X}\delta(A)$，试证明：（1）$\delta(A_1\cup A_2)+\delta(A_1\cap A_2)\geq\delta(A_1)+\delta(A_2)$，（2）利用上述不等式证明集合族$\mathscr{A}=\{A \mid \delta(A)=\delta_0\}$满足条件：$A_1, A_2\in\mathscr{A}\Rightarrow A_1\cup A_2, A_1\cap A_2\in\mathscr{A}$。（3）如$\delta_0>0$，则在$A_0=\bigcap\limits_{A\in\mathscr{A}}A$中含有$\delta_0$个$X$中这样的顶点，它至少不被一个极大并列集所饱和。

26、设两分图$G=(X, Y, E)$中存在一个并列集饱和X中的所有的点。试证明：存在一个点$x_0\in X$使得对每个点$y\in\Gamma_G(x_0)$，至少有一个极大并列集使用边(x_0, y)。

27、利用上题进一步证明：如果对$x\in X$，x的极小次$d_G(x)=k$，则至少存在$k!$个不同的极大并列集。

28、设在多重两分图$G=(X, Y, E)$中$|X|=m$，$|Y|=n$，且将其顶点编号使得对一切$x_i\in X$，$y_j\in Y$有$d_G(x_1)\leq d_G(x_2)\leq\cdots\leq d_G(x_m)$，$d_G(y_1)\geq d_G(y_2)\geq\cdots\geq d_G(y_n)$。试证：存在一个饱和$X$中所有的点的并列集之充分条件是：$n\geq m$，$d_G(x_1)>0$，且$\sum\limits_{i=1}^{k}d_G(x_i)>\sum\limits_{j=1}^{k-1}d_G$

(y)，$(k=2, 3, \cdots, m)$成立。

29、试证明，如果在多重两分图$G=(X, Y; E)$中有，$\min_{x\in X} d_G(x) \geq \max_{y\in Y} d_G(y)$，及$|Y|\geq|X|$，则存在饱和$X$中所有点的并列集。

30、试证明，如$G=(X, Y, E)$是无孤立点的多重两分图，$|Y|\geq|X|$，且对某个$x_1\in X$有，

$$\min_{\substack{x\neq x_1\\ x\in X}} d_G(x) \geq \max_{y\in Y} d_G(y)$$，则存在饱和X中所有点的并列集。

31、试证明，在多重两分图$G=(X, Y, E)$中存在一个并列集饱和所有具极大次数的顶点。

32、试证明：在两分图$G=(X, Y, E)$中存在一个并列集饱和X中的所有的点，当且仅当

$|X-\Gamma_G(B)|\leq|Y-B|$ $(B\subset Y)$成立。

33、试证明，在两分图$G=(X, Y, E)$中存在一个并列集同时饱和X及$B\subset Y$中的一切点的充分必要条件是：（1）$|\Gamma_G(S)|\geq|S|$，$(S\subset X)$，（2）$|\Gamma_G(T)|\geq|T|$ $(T\subset B)$均成立。

34、试证明：在两分图$G=(X, Y, E)$中存在一个并列集同时饱和X及$B\subset Y$中一切点的充分必要条件是，$\min\{|\Gamma_G(S)|, |X|-|B-\Gamma_G(S)|\}\geq|S|$ $(S\subseteq X)$成立。

35、试证明：如果M是一个并列集，T是一个径集，则$\min|T|\leq 2\max|M|$又：等号成立的条件是什么？

36、在一个单纯图$G=(X, E)$中考查由顶点的子集构成的族：$\mathscr{C}=\{C_1, C_2, \cdots, C_p\}$它满足条件：

（1）$|C_i|$是奇数，$(i=1, 2, \cdots, p)$，（2）对于每条边$\{x, y\}\in E$恒存在一个i使得：$|C_i\cap\{x, y\}|=\min\{|C_i|, |\{x, y\}|\}$，如果$|C_i|=2k-1$，则令$c(C_i)=\max\{k, 1\}$，又记

$$c(\mathscr{C})=\sum_{i=1}^{p} c(C_i)$$，试证明：对每个并列集M恒有$|M|\leq\min_{\mathscr{C}} c(\mathscr{C})$，又$\max_{M}|M|=\min_{\mathscr{C}} c(\mathscr{C})$

（J.Edmonds, 1964）

第十一章　稳固集（独立集）

§1　稳固集与径集

任给图$G=(X,E)$。在顶集$V(G)$中任一子集$S\subset V(G)$，其中任二点均不相邻，则这样的顶点集合S称为图G的**稳固集**，或顶点的**独立集**。根据这个概念，在上章所讲的并列集，实际是边集的一个独立子集。所谓独立，乃指集合以内的元素，互不相邻。现在再来看另一个顶点集合，设有顶点集合$T\subset V(G)$，图的任一边至少有一个端点，落在T内，则集合T称为图G的**径集**（Transversal）。这好像在上章讲的边复盖集一样。每个顶，在复盖集里，总有一边复盖这个顶。所以径集，可以称为是**顶复盖集**，它是一个顶点集合，每一边，在复盖集里，总有一顶，复盖这条边。

设S_1是一个稳固集其维$|S_1|$极大，即其中所含点的个数，至少不少于任何这样的一个稳固集。设S是任一稳固集，恒有$|S_1|\geqslant|S|$。则S_1称为**极大稳固集**，其维称为原图的**稳固数**。一般记为$\beta(G)$，当然这个稳固数β是唯一确定的。设S_1是一个极大稳固集，$T_1=V(G)-S_1$将是一个径集。在图G中任取一边，这边的两个端点，其中至少将有一点，落在T内。实际上，对任一稳固集S，$T=V(G)-S$将是一个径集。设用β表示图的稳固数，α表示极小径集的维，则下定理成立：

定理11.1　$\alpha+\beta=n$。

证　设S_1是一个极大稳固集，其维$|S_1|=\beta$，则

$$n-\beta=|X|-\beta=|X-S_1|\geqslant\alpha\Rightarrow\alpha+\beta\leqslant n,$$

又　$n-\alpha=|X|-\min|T|\leqslant\beta\Rightarrow\alpha+\beta\geqslant n,$

故 $\alpha+\beta \quad n$。

（证毕）

这个定理和极大并列集的维与极小边复盖集的维之间的关系是一样的。即若极大并列集的维记为β_0，极小边复盖集的维记为α_0，有

$$\alpha_0+\beta_0 \quad n。$$

设图G是两分的；$G=(X,\ Y;\ E)$，则由于极大流量一极小截量定理，有

$$\beta_0 \quad \alpha,$$

故在两分图上，有下

推理11.1a $\alpha_0=\beta$。

即在两分图上，图的稳固数，等于其极小边复盖集的维。写出两分图的结合矩阵，这是一个（0,1）矩阵，其极大并列集的维一般称为该矩阵的项秩。因此，在两分图上，其稳固数

$$\beta=n-\text{项秩}。$$

§2 极大稳固集

设$S_1\subset V(G)$是图$G \quad (X,\ E)$的极大稳固集，则$|S_1|$称为图的稳固数。但如何来判断一个稳固集，是否已达到极大呢？为此，首先定义一个关于稳固集S的交错序列：

$$\sigma=\{a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ \cdots\}。$$

1．命 $A \quad X \quad S \quad \{a_1,\ a_2,\ \cdots\}$，

$B \quad S \quad \{b_1,\ b_2,\ \cdots\}$。

在A中任取元素a_1，在B中选取元素b_1，使

$$\Gamma_G(b_1)\cap\{a_1\}\neq\phi。$$

2．设已作得交错序列

$$\sigma=\{a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ \cdots,\ a_{i-1},\ b_{i-1},\ a_i\},$$

则b_i按下法选取，即取b_i满足下二条件：

$b_i \in B - \{b_1, b_2, \cdots, b_{i-1}\}$,

$\Gamma_G(b_i) \cap \{a_1, a_2, \cdots, a_i\} \neq \phi$。

3．设已作得交错序列σ，如

$\sigma = \{a_1, b_1, \cdots, a_i, b_i\}$，

则a_{i+1}的选取如次，选取

$a_{i+1} \in A - \{a_1, a_2, \cdots, a_i\}$，

$\Gamma_G(a_{i+1}) \cap \{b_1, b_2, \cdots, b_i\} \neq \phi$，

$\Gamma_G(a_{i+1}) \cap \{a_1, a_2, \cdots, a_i\} = \phi$。

设不破坏规律（2）与（3）而σ不能再加长，则σ称为是极大的。于此，有下

定理11.2 稳固集S极大，其充分和必要条件是不存在关于S的极大奇交错序列σ。

为证本定理，先证下一引理：

引理11.1 设图G是一棵树，（A，B）是其顶的一个2—着色*，且$|B| \geqslant |A|$，则G的悬挂点中至少有一个属于B。

证 设树G的悬挂点集为A_1，且$A_1 \subset A$，作树G_{X-A_1}，命其悬挂点集为B_1，则$B_1 \subset B$。因（A，B）是G的一个2-着色，B_1中每一点必与某一悬挂点相邻，$A_1 \subset A$，故$B_1 \subset B$。再作树$G_{X-A_1-B_1}$，命其悬挂点集为A_2，则$A_2 \subset A$，继续这样作树，继续得悬挂点集A_3与B_3等。设最后得A_q与B_q，据A_i与B_i的构造，知

$|A_1| \geqslant |B_1| \geqslant |A_2| \geqslant |B_2| \geqslant \cdots, \geqslant |B_q| \geqslant |A_{q+1}|$，

$B_q \neq \phi$；$B_{q+1} = \phi$。

如果$A_{q+1} \neq \phi$，则有：

$$|A| > \sum_{i=1}^{q} |A_i| \geqslant \sum_{i=1}^{q} |B_i| = |B|,$$

此与$|A| \leqslant |B|$矛盾。如果$A_{q+1} = \phi$，则集合B_q成为一个点

---

* 即将顶点集分成两个不交的稳固集（A，B）的一个划分。

（不再是$G_{A_q \cup B_q}$的悬挂点），于是$|A_q|>|B_q|$，故

$$|A|=\sum_{i=1}^{q}|A_i|>\sum_{i=1}^{q}|B_i|=|B|$$

仍与$|A|\leqslant|B|$矛盾。

引理11.2 设图G是一个n阶的树，并设(A, B)是其顶的一个2－着色，具特性$|A|=|B|$或$|A|=|B|+1$。则存在一个交错序列$\sigma=\{a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots\}$用到$G$的每个顶点。

证 当$n=1$或2，引理11.2必能成立。设引理对于$n=2k$能成立，往证其对于$n=2k+1$也必成立。

由于$|A|=|B|+1$，据引理11.1存在一个悬挂点属于A，命为$a_{k+1}\in A$。作图$G_{X-\{a_{k+1}\}}$，据归纳假设，树$G_{X-\{a_{k+1}\}}$的顶，构成一个交错序列

$$\sigma=\{a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, b_k\}$$

满足上述的要求(2)与(3)。由于$a_{k+1}\in A$，故

$$\Gamma_G(a_{k+1})\cap\{b_1, b_2, \cdots, b_k\}\neq\phi,$$

$$\Gamma_G(a_{k+1})\cap\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}=\phi,$$

按构造交错序列的规律，可将a_{k+1}加进序列σ，得新交错序列

$$\sigma'=\{a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_k, b_k, a_{k+1}\}。$$

同理，可证当引理对于$n=2k+1$能成立，则引理对于$n=2k+2$也必成立。即引理对于任意阶的树均成立。

定理11.2的证 设稳固集S极大，往证不存在关于S的奇极大交错序列σ。设存在这样的奇极大交错序列σ，作

$$B'=(\sigma-B)\cup(B-\sigma),$$

则 $B'=\{a_1, a_2, \cdots, a_{2k}, a_{2k+1}, b_{2k+1}, \cdots\}$，由于$\sigma$的极大性，知

$$\Gamma_G(b_{2k+j})\cap\{a_1, a_2, \cdots, a_{2k}\}=\phi（对任一$$

j均成立）。

又由σ的构造方法知

$$\Gamma_G(a_i)\cap\{a_1, a_2, \cdots, a_{2k}, a_{2k+1}\}=\phi,$$

故 B'也是一个稳固集，且

$$|B'|\geqslant|B|+1,$$

这和B的极大性相矛盾。

再设稳固集B不极大，往证存在一个关于B的奇极大交错序列。设A是一个极大稳固集：$|A|>|B|$，

作 $B_0=B-A$，$A_0=A-B$，

则 $|A|>|B|\Rightarrow|A_0|>|B_0|$。

作子图$G_{A_0\cup B_0}$，命$G_{A_1\cup B_1}$，$G_{A_2\cup B_2}$，…，$G_{A_i\cup B_i}$，…，是其联接的分子图，其中$A_i\subset A_0$，$B_i\subset B_0$（$i=1, 2, \cdots, k$），由于$|A_0|>|B_0|$，$|A_0|=\Sigma|A_i|$，$|B_0|=\Sigma|B_i|$，故其中必出现某一i，使$|A_i|\geqslant|B_i|+1$。设此$i=1$，则(A_1, B_1)是其顶点集的一个二着色。如果$|B_1|+1=|A_1|$，则由于(A_1, B_1)也是联接分子图$G_{A_1\cup B_1}$的跨顶树的顶点集的2着色，依引理11.2，其顶点集构成一个奇极大交错序列σ，显然σ也是关于B的一个交错序列。此外，σ也是极大的。因为如$b\in B-\sigma$，则或者$b\in B-A=B_0$，因而b不与任一个σ中的点a_i相邻，或者$b\in B\cap A$，于是b不与任何a_i相邻（因A也是稳固集）。因而σ是关于B的奇极大交错序列。如果$|B_1|+1<|A_1|$，则依引理11.1，$G_{A_1\cup B_1}$之跨顶树中至少有一个悬挂点$\in A_1$，于是可由A_1中除去这类悬挂点直到得出在剩余的树上的一个顶点二着色(A_1', B_1)且$|A_1'|=|B_1|+1$为止。此时，由前述可得出B的一个奇极大交错序列。

（证毕）

任给一个n阶的图G，它的稳固数究竟等于什么，这个问题，并没有解决。以下将对稳固数$\beta(G)$进行一些研究，设法找出$\beta(G)$所在的范围。所谓给定一个无向图G，是已给

出其顶及边，那么在这个图里，各顶上的次数是已知的。在一个无向图G里，若有顶集$C\subset V(G)$，其中每二顶都相邻，则这个顶集称为成一集团。已给顶集$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，作出以这些点为顶的完全图K_n，图G与$\overline{G}$称为互补的，设G与$\overline{G}$的顶点集相同，且$G\cup\overline{G}=K_n$。于是图G里一个稳固集，在$\overline{G}$里相应的子图，便是一个集团。而G里任一集团，在其补图$\overline{G}$里的相应子图，便是一个稳固集。

已给无向图$G=(X,E)$，究竟如何确定其稳固数$\beta(G)$。以下研究$\beta(G)$所在的范围。首先有下

定理11.3 （J. C. Meyer，〔1972*〕）已给单纯图$G=(X,E)$，其顶集$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$满足条件

$$1\leqslant d_G(x_1)\leqslant d_G(x_2)\leqslant\cdots\leqslant d_G(x_n)。$$

设对某一整数p：$2\leqslant p\leqslant n$，有

$$d_G(x_n)+\cdots+d_G(x_{n-p+2})\leqslant n-p,$$

则每一个稳固集，其维小于p的，必含在一个p维的稳固集内。

证 本定理的证明，使用关于p的归纳法。

首先，设$p\geqslant 2$，设定理对于p成立，往证定理对于$p+1$也成立，设定理的条件对于$p+1$成立，即设

$$d_G(x_n)+d_G(x_{n-1})+\cdots+d_G(x_{n-p+1})\leqslant n-(p+1)$$

则自然也有

$$d_G(x_n)+d_G(x_{n-1})+\cdots+d_G(x_{n-p+2})$$
$$\leqslant n-(p+1)<n-p,$$

据归纳假设，对任一个维数小于p的稳固集S，都含在某一个p维的稳固集S_0内。

命 $S_0=\{y_1,y_2,\cdots,y_p\}$，

---

* J C Meyer. Ensembles stables maximaux dans les hypergraphes. C. R Acad Sc Paris 274(1972), 144～147

则 $$|\Gamma_G(S_0)| \leqslant d_G(y_1)+d_G(y_2)+\cdots+d_G(y_p)$$
$$\leqslant d_G(x_n)+d_G(x_{n-1})+\cdots$$
$$+d_G(x_{n-p+1}) \leqslant n-p-1,$$

故 $$|\Gamma_G(S_0)| < n-p = |X-S_0|.$$

故在$X-S_0$内，至少含有一项，不与S_0中的点相邻。故S_0含在一个$p+1$维的稳固集内。

定理对于$p=2$显然能成立。因任作一个一维的稳固集$S=\{x\}$，因$\Gamma_G(x) \leqslant \Gamma_G(x_n) \leqslant n-2$，在图里，必有一点，不与$x$相邻。故存在2维的稳固集，包含原给的1维稳固集，据归纳法，定理得证。

（证毕）

推理11.3a （C.Berge,[1960*]）单纯n阶图$G=(X, E)$，其极大次为h，则每一极大稳固集，其维至少是$\left[\frac{n}{h+1}\right]^*$。其中$\left[\frac{n}{h+1}\right]^*$为大于或等于$\frac{n}{h+1}$的极小整数。

证 命$p=\left[\frac{n}{h+1}\right]^*$则因$G$的阶为$n$，其极大次$h$最大为$n-1$，故$\left[\frac{n}{h+1}\right]^*$至少是1。

显见

$$d_G(x_n)+d_G(x_{n-1})+\cdots+d_G(x_{n-p+2}) \leqslant h(p-1)$$

又当 $n=q(h+1)+r$，$(1 \leqslant r \leqslant h+1)$，时

取 $p=q+1$，有 $h(p-1)=n-p-(r-1)$，

由于 $r-1 \geqslant 0$，故$h(p-1) \leqslant n-p$，

---

* C Berge, problemes de coloration en Theorie des Graphes, Publ Inst. Stat Univers te de paris. 9 (1960), 123～160

故　$d_G(x_n)+d_G(x_{n-1})+\cdots+d_G(x_{n-p+2})\leqslant n-p$。

据上定理，便可推得本推理。

（证毕）

据这个推理，显有下

推理11.3b　$\beta(G)\geqslant\left[\dfrac{n}{h+1}\right]^*$，而且这个结果是可能最好的。

证　据推理11.3a，设$\beta(G)$是G的稳固数，显有

$$\beta(G)\geqslant\left[\frac{n}{h+1}\right]^*,$$

以下往证，确有图存在，其阶为n，极大次$\Delta(G)=h$，稳固数

$$\beta(G)=\left[\frac{n}{h+1}\right]^*。$$

这个推理给出单纯图G的稳固数$\beta(G)$的一个下界。

首先，设a与b是二整数，恒有

$$\left[\frac{a}{b}\right]^*=\left[\frac{a-1}{b}\right]+1,$$

设已给二正整数a与b，书

$$a=qb+r,\quad 0\leqslant r<b,\quad q=\left[\frac{a}{b}\right],$$

若$r=0$，有$a=qb$，故

$$a-1=(q-1)b+b-1,\qquad 0\leqslant b-1<b$$

于是　$[a/b]^*=q=\left[\dfrac{a-1}{b}\right]+1,$

若$r>0$，则

$$a-1=qb+(r-1),\qquad 0\leqslant r-1<b$$

故　$\left[\dfrac{a}{b}\right]^*=q+1=\left[\dfrac{a-1}{b}\right]+1,$

命　$p=\left[\dfrac{n}{h+1}\right]^*=\left[\dfrac{n-1}{h+1}\right]+1,$

则　$n-1=(p-1)(h+1)+r,\qquad 0\leqslant r<h+1,$

于是一个n阶的图G，可如下作出：

作一个具$r+1$个顶的集团K_{r+1}，再作$p-1$个互质且互不相邻的$(h+1)$集团，$K_{h+1}^{(i)}$（$i=1, 2, \cdots, p-1$）各与集团K_{r+1}不相邻。作图$G=K_{r+1}\cup K_{h+1}$，于是图G共含$(p-1)\cdot(h+1)+r+1=n$个顶，在这些集团中各取一顶构成一个稳固集，其维为p，即$\beta(G)=p$。每个K^{h+1}，其顶的次数为h，K_{r+1}的极大次是r，由于$0\leqslant r<h+1$，故$\Delta(G)=h$，故确存在图G，其阶为n，极大次为h，其稳固数为

$$\beta(G)=\left[\frac{n}{h+1}\right]^*。$$

（证毕）

§3 涂兰定理及其有关问题

据上节推理的证明，设任给正整数n与k：$n\geqslant k\geqslant 0$，可设

$$n=k(q-1)+r, \qquad 0\leqslant r<k$$

作图G，使其含r个q集团，$k-r$个$(q-1)$集团。在每个集团中任取一点，共得k点，构成一个稳固集S，$|S|=k$，显见$\beta(G)=k$，这样的图，记作$G_{n,k}$。于此有下

定理11.4 （Turán,〔1941*〕）任给一个图集

$$\mathscr{H}=\{G=(X, E)/|X|=n, \beta(G)\leqslant k\}$$

其阶统为n，稳固数$\leqslant k$，则其中边数可能最少的图，同构于$G_{n,k}$。

证 将n写成$n=k\cdot q+r$（$0\leqslant r<k$）形式：

---

* P Turán: An EXtremal Problem in Craph Theory(Hungarian) Mat Fiz Lapok.48(1941), 436～452

$$\begin{cases} k+1 & 2k+1 & 3k+1 & qk+1 & \cdots \\ k+2 & 2k+2 & 3k+2 & qk+2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 2k & 3k & 4k & (q+1)k & \cdots \end{cases}$$

对n进行归纳。设对第q列以前的各列的n，k，定理均成立，往证定理对于第q列也成立。

首先验证对于第一列的n、k定理能成立。譬如取$n=9$，$k=6$，便有$9=6+3$。

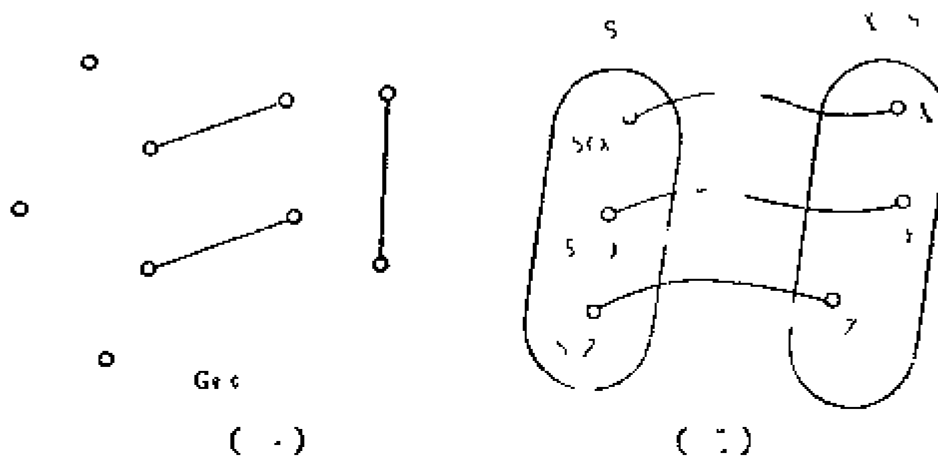


图 11.1

在图G中，先任取六点，构成稳固集S，$X-S$共含三点，命为x，y，z，这三点到S都应有边相联，否则稳固集便可加大。设命x，y，z与S中相联的点，分别是$s(x)$，$s(y)$，$s(z)$。由于x，y，z各不相同，$s(x)$，$s(y)$，$s(z)$也应各不相同。否则若有$s(x)=s(y)$，在S中舍去$s(x)=s(y)$，补进x，y，稳固集S便将加大。在G中作尽可能少的边，可以假定x与y原不相邻，由以上讨论，显见图 11.1 中的(一)与(二)是同构的。

其次，在图集

$$\mathscr{H}=\{G/N(G)=n,\ \beta(G)\leqslant k\}$$

中，设有图$G\in\mathscr{H}$，其$\beta(G)=k<k$。在图$\overline{G}$中，任取稳固集$\overline{S}$，$|\overline{S}|=\overline{k}<k$。在$X(G)-S$中任取一点$x$，$x$到$\overline{S}$将有

联边。去掉这条联边，将点 x 加到 $\overline{S}$ 里去，图 $\overline{G}$ 的边数便将减少，而其稳固数便将加大. 故若在 $\mathscr{H}$ 里取边数尽可能少的图 G，便可假定其稳固数等于 k。在 G 中取稳固集 S，则 $|S|=k$，由上所论，可知任一点 $x\in X-S$ 必与 S 相邻。作子图 G_{X-S}，其阶 $|X-S|=n-k<n$，其稳固数 $\leqslant k$. 故由归纳假设，有

(1) $m(G_{X-S})\geqslant m(G_{n-k,k})$,

但 $G_{n,k}$ 的构成，可在 $G_{n-k,k}$ 的 k 个互质的集团中各加进一点得来。但在每个集团中，各加进一点，其边的总数，将增加 $n-k$。故 $m(G_{n,k})-m(G_{n-k,k})=n-k$，设 $G\in\mathscr{H}$，$\beta(G)=k$，则由于 G 的边数，尽可能地少，遂有

(2) $m(G)\leqslant m(G_{n,k})$,

故

$$n-k=|X-S|\leqslant m_G(X-S,S)=m(G)-m(G_{X-S})$$
$$\leqslant m(G_{n,k})-m(G_{n-k,k})=n-k_{\circ}$$

由于在这个不等式中，两端都是 $n-k$，遂有

$$m(G)-m(G_{X-S})=m(G_{n,k})-m(G_{n-k,k})$$

由(1)与(2)，便应有

$$m(G_{X-S})=m(G_{n-k,k}),$$

及 $$m(G)=m(G_{n,k})_{\circ}$$

由上述证明，可知图 G 是由 k 个互质且互不相邻的集团 C_1，C_2，…，C_k 及一个 k 项的稳固集 S 所构成，且

$$|X-S|=m_G(X-S,S)=n-k,$$

由此可知，自每一项 $x\in X-S$ 仅有一条边联到 S，如上，命 $s(x)$ 为项 x 在 S 中的邻点，若 $x\in C_i$，$y\in C_j$ $(i\neq j)$，

则 $$s(x)\neq s(y),$$

否则若 $s(x)=s(y)$，在 S 中去掉这点，补上 x，y 二点，因 x 与 y 属于 G 的不同的集团，x 与 y 应不相邻，G 的稳固数将加大，这不可能。

若 x，y 属于同一集团，$y\in C_i$，$y\in C_i$，则必有 $s(x)=$

$s(y)$，否则，在C_i之外各个集团，各取一点，其在S中的邻点应各不同，且也不同于$s(x)$与$s(y)$，于是S里将含有$k+1$个不同的点，这也不可能。

故知图G具下列性质：

（1）阶n，具可能最少的边数。

（2）其n个顶点，分成k个集团C_1，C_2，…，C_k及一个k维的稳固集S。

（3）在同一集团C_i中的点，其在S中的邻点，均相同。每个集团C_i，唯一对应于一点x_i。将此点加进C_i也成一个集团。故G的稳固集S，实际是从所分解的每个集团中各取一点所构成。因而图G同构于$G_{n,k}$。（证毕）

推理11.4 设G是一个单纯网，n顶，m边，且$\beta(G)=k$，

则
$$m\geqslant(q-1)\left(n-\frac{kq}{2}\right),$$

其中
$$q=\left[\frac{n}{k}\right]^{*}。$$

且式中等号成立的充分和必要条件是$G\cong G_{n,k}$。

证 $G_{n,k}$共含k个集团，其中r个各含q个顶，$k-r$个各含$q-1$个顶，故

$$m(G_{n,k})=r\cdot\frac{q(q-1)}{2}+(k-r)\cdot\frac{(q-1)(q-2)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(q-1)(n-k+r)$$

$$=(q-1)\left(n-\frac{k}{2}\cdot q\right)。$$

但据上定理，$G_{n,k}\in\mathscr{H}=\{G/N(G)=n,\ \beta(G)\leqslant k\}$，且$G_{n,k}$具可能最少的边，所给的图$G$阶为$n$，稳因数为$k$，所以$G\in\mathscr{H}$，但$G$不一定具可能最少的边，故

$$m(G)\geqslant m(G_{n,k})=(q-1)\left(n-\frac{k}{2}q\right)。$$

（证毕）

推理11.4b 设$G=(X,E)$是一个单纯图，n顶，m边，

则 $$\beta(G)\geqslant\frac{n^2}{2m+n},$$

其等号成立，当且仅当图G的联接的分子图是同维的集团。

证 设$\beta(G)=k$，命

$$n=k(q-1)+r,\quad (0\leqslant r<k)$$

自推理11.4a，可知

$$m(G)=m\geqslant(q-1)\left(n-\frac{k}{2}q\right)$$

$$=\frac{1}{2k}(n-r)(n-k+r)$$

$$=\frac{1}{2k}[n(n-k)+r(k-r)],$$

当$r=0$，右端最小，故在此时，有

$$2km\geqslant n(n-k),$$

或 $$k\geqslant\frac{n^2}{2m+n},$$

此式取等号，当且仅当$r=0$或$n=kq_1$，此时图G的n个顶共分成k个集团，各含q_1个顶，每个集团含$q_1(q_1-1)/2$条边，代入不等式的右端，有

$$\frac{n^2}{2m+n}=\frac{k^2q_1^2}{q_1(q_1-1)k+kq_1}=\frac{k^2q_1^2}{kq_1^2}=k,$$

反之，设等式成立，即

$$k=\frac{n^2}{2m+n}。$$

代入最初的不等式，可以推出$r=0$，或$r=k$，于是

$$n=k(q-1)\text{ 或 }n=kq,$$

亦即图G的顶可以等分为k个同维的集团。

（证毕）

推理11.4c 设$G=(X,E)$是一个单纯图，n顶，m边，则

$$\beta(G)\geqslant\frac{2n-m}{3},$$

等号成立的充分和必要条件是G的每一联接的分子图是一个2—集团或3—集团。

证 可以假定G是联接的，设G不联接，而分成q个联接的分子图C_1，C_2，…，C_q，其阶分别为n_i，边数分别为m_i，G的极大稳固集，应是各个分子图极大稳固集之合。故

$$\beta(G)=\Sigma\beta(G_i)\geqslant\Sigma\frac{2n_i-m_i}{3}=\frac{2\cdot\Sigma n_i-\Sigma m_i}{3}$$

$$=\frac{2n-m}{3}。$$

因此，本推理的验证，只须证推理对联接图能成立即足。

设图G是联接的单纯图，$|X|=n$，$m(G)=m$，首先自推理11.4b，有

$$\beta(G)\geqslant\frac{n^2}{2m+n},$$

而
$$\frac{n^2}{2m+n}\geqslant\frac{2n-m}{3},$$

当且仅当

$$n^2-3mn+2m^2\geqslant0$$

或
$$(n-m)(n-2m)\geqslant0,$$

若$n\leqslant m$或$n\geqslant2m$此式恒成立，故当$n\leqslant m$或$n\geqslant2m$时，恒有

$$\beta(G)\geqslant\frac{2n-m}{3}。$$

若等号成立，即

$$\beta(G)=\frac{n^2}{2m+n}=\frac{2n}{2}=m,$$

此时$m=n=n=2m$。如$n=m$，则仅可能G是一个3－集团(已假定G为联结的)。如$n=2m$，则由于G是联结的，必有$m\geqslant n-1$，因而G是一个树，且$m=n-1$，于是导出$n=2$，即G是一个2—集团。

（证毕）

推理11.4d （Zarankiewicz，〔1947*〕）设G是一个n项的单纯图，且具极大次h，令$k=\left[\frac{n}{h+1}\right]$则$\beta(G)\geqslant k$，若$G$不含$k$个互质的集团，每个集团具同维$n/k$，则更有$\beta(G)>k$。

证 在图G里，边数m满足条件

$$2m=\sum_{x\in X}d_G(x)\leqslant h\cdot n\leqslant\left(\frac{n}{k}-1\right)\cdot n,$$

或 $2km\leqslant n(n-k)$，

或 $k\leqslant\frac{n^2}{2m+n}$。

据推理11.4b，乃有

$$\beta(G)\geqslant\frac{n^2}{2m+n}\geqslant k,$$

或 $\beta(G)\geqslant k$。

如G不是由k个互质的同维的集团组成，则由推理11.3b有$\beta(G)>k$。

（证毕）

〔注〕设n是$h+1$的整倍数，命

$$k=\frac{n}{h+1},$$

据本推理，有 $\beta(G)\geqslant\frac{n}{h+1}$，

---

* K. Zarankiewicz, Sur les relations symétriques dans l'ensemble fini, Colloquium Math., 1(1947), 10～15

若n不是$h+1$的整倍数，命

$$k\left[\frac{n}{h+1}\right],$$

据本推理有

$$\beta(G)>k,$$

综合以上二者，有

$$\beta(G)\geqslant\left[\frac{n}{h+1}\right]^*。$$

这就是前一节的推理11.3b（实际上这是一个循环关系）。

习　题

1　设单纯图$G=(X,E)$的阶为n，试证明（1）G是两分图的充要条件是对G的每一个子图H均有$\beta(H)\geqslant\frac{1}{2}|X(H)|$。（2）$G$是两分图的充要条件是对$G$中每一个无孤立点的子图$H$均有$\beta(H)=\alpha(H)$成立。

2．如对图$G=(X,E)$中任一边$e\in E$均有$\alpha(G-e)<\alpha(G)$，则称图G为α—临界的。试证明：（1）联结的α—临界图中无断点。（2）如G为联结的图，则$\alpha\leqslant\frac{1}{2}(|E|+1)$。

3　在单纯图$G=(X,E)$中，如果点$x\in X$具有性质：$\alpha(G-x)<\alpha(G)$，则点x称为α—临界的点。试证明x是G的α—临界的点，当且仅当x属于G的某个极小径集T。

4．试证明：对任意图G恒有：$\alpha(G)\geqslant\beta_0(G)$，以及$\alpha_0(G)\geqslant\beta(G)$。

5　试求使$\alpha_0(G)=\beta_0(G)$的充要条件。

6　试证明：对任意图G有$\alpha(G)\geqslant G$中各点的极小次数。

7　试证明：如G是两分图，则其边数满足：$|E|\leqslant\alpha(G)\cdot\beta(G)$，仅在$G$是完全两分图时才能取等号。

8　图G的顶点x被称为是自由的，如果它至少属于一个极大稳固集，但不属于所有的极大稳固集。设S是一个极大稳固集，试证明：x是自由的，当且仅当存在一个关于S的交错序列$\sigma=(a_1, b_1, a_2, \cdots, a_q, b_q)$，它含有$x$，而且，如果$b\in S-\sigma$，则有，$\Gamma_G(b)\cap\{a_1, a_2, \cdots, a_q\}=\phi$。

9．设$G=(X,E)$为单纯图，$\mathscr{C}=\{C_1, C_2, C_3, \cdots, C_k\}$为其顶点

集X的 个划分 且每个G_{C}均是 个集团。令$\theta(G)=\min_{\mathscr{C}}|\mathscr{C}|$ 为把X划分为集团的最小可能的集团数，试证明，$\beta(G)\leq\theta(G)$。且如果S是 个稳固集，$\mathscr{C}$为 个划分为集团的划分使得 $|S|=|\mathscr{C}|$，则S是极大稳固集，$\mathscr{C}$是极小划分。

10 采用Turan定理证明，具n个顶点，稳固数为k的图G中所具有的极小边数等于$\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{i}{k}\right)$。

(Las Vergnas)

11 设$G=(X,E)$为联结的 M为 个极大并列集，但不是完美的。令X_1表示由某个不饱和点经过一个偶长的交错链（但不能经任何奇长的交错链）可达的顶点集合，X_2表示由某个不饱和点经过 个奇长的交错链（但不能经任何偶长的交错链）可达的顶点集合。试证明，如果$X_1\cup X_2=X$，则X_1是图G的极大稳固集。

(Berge 1957)

12 试证明 如果图G具n点，m边且$m>\left(\frac{n^2}{4}\right)$，则$G$中含有一个三角形，又证明，存在 个$n$阶的图具$\left(\frac{n^2}{4}\right)$条边，但不含三角形。

13 设图G是单纯的。试证明G中存在 个稳固集S使得G的每个顶点均是一条以S中的点为终点的长度不大于2的链的起点。(Lovász, chvátal)

14 如果图$G=(X,E)$中任 边e均有性质，$\beta(G-e)>\beta(G)$，则称G为β—临界的，试证明 联结的β—临界图无断点。

15 设图G是β—临界的，$\beta(G)=k$ 试证明 对每个点x均存在一个稳固集S_x具有性质 $|S_x|=k-1$，且$S_x\cup\{x\}$为一个极大稳固集，称集合S_x为x的单元(cell)。

16 试证明 如果G是无孤立点的β—临界图，则G不含临界顶点，即这样的点x $\beta(G-x)<\beta(G)$。但其逆不真。讨论下列各图：(1) C_7 长为7的无弦的圈的补图，(2) C_5，再扩充一点x且使x与C_5中所有点均有边相连而得到的图。

17 试证明 在 个β—临界图中 两个顶点a与b有 个公共的单元，当且仅当它们相邻。

18 试证明 如果图G是联结的β—临界图，且其阶不小于3，则其每个顶点的次均不小于2。

19 试证明，设图G是β—临界图，$\beta(G)=k$，则G中任二相邻边(a,b)

与(b, x)均位于一个公共的、奇长的无弦的初级圈内.

20 试证明：在联结的β一临界图中，任一个集团均不可能是一个点断集.

21 试证明：联结的β一临界图G或者是一个集团，或者含有一个无弦的长度≥ 5的奇圈.

22 试证明：在一个无孤立点的β一临界图G中，每个稳固集S均满足$|\Gamma_G(S)|\geq|S|$。

23 试证明 如果在2一联的图G中有$\beta(G)\leq\kappa(G)$，则G中含H一圈.

24 试证明：Peterson图的补图是β一临界的。

第十二章 图的着色

所谓一个图的着色，分以下三种情况：

（1）将图的边，染以颜色，使相邻的边不同色。

（2）将图的顶染以颜色，使相邻的顶不同色。

（3）设G是平面图，则图G有很多面，将图的面染以颜色，使相邻的面不同色。

在第（1）种情况，所用到的极少颜色数，称为图G的**着色指数**记作$q(G)$。在第（2）种情况所用到的极少颜色数，称为图G的**色数**，记作$\gamma(G)$。第（3）种情况，实际上就是平常的地理图，由于图G是平面的，故图G有一对应的偶图G^*，将平面图G的面染色，实际上就是将偶图G^*的顶染色。大家知道，这里有一个著名的猜想，就是所谓"四色猜想"，即可以用四种颜色，涂染一个平面图的面使相邻的面均不同色。这个猜想最近已用计算机予以验证，但在理论上，还没有人加以证明。以下假定这个猜想业已验证，即假定平面图是可—4—面着色的。

（一）边的着色

§1 着色指数

本章将首先研究第一类问题，即研究图G的着色指数$q(G)$。这里有两个主要问题，一个是已给图G如何确定它的着色指数$q(G)$，一个是图G的着色指数$q(G)$有些什么主要性质。

由于要求相邻的边均不同色，故每一种颜色所涂染的边集，应是一个并列集。当图G的着色指数是$q(G)$时，即图G的边

集E，可以划分成$q(G)$个并列集E_1，E_2，…，E_q，每个并列集E_i里的边染以一种颜色，则图G的每一边均将染上颜色，且相邻的边均不同色。

设用k种不同的颜色来涂染图G的边使相邻边均不同色，则图G称为**可k－边－着色**，显见$k \geq q(G)$。又若图G的极大次是Δ，显见$q(G) \geq \Delta$，否则在具极大次的那个点上的边将有同色者。

以下研究几个特殊图的着色指数。

设K_n是一个n阶的完全图，关于K_n的着色指数$q(K_n)$，有下

定理12.1 单纯的完全图K_n，其着色指数是

$$q(K_n) \begin{cases} n-1 & \text{当}n\text{是偶数} \\ n & \text{当}n\text{是奇数。} \end{cases}$$

证 1．当n是偶数，记K_n的n个顶为x_0，x_1，x_2，…，x_{n-1}，则

$$[x_0x_1]，[x_2x_{n-1}]，[x_3，x_{n-2}]，…，$$
$$[x_{n/2+1}，x_{n/2}]$$

等边将构成K_n的一个完美并列集，作轮换$(x_1，x_2，…，x_{n-1})$共得$n-1$个互质的完美并列集，E_1，E_2…，E_{n-1}，共含$\frac{1}{2}n\cdot(n-1)$条边，每个完美并列集，染以一种颜色，每条边得一种颜色，且相邻边各不同色。

当n是奇数，可另取一点x_0，加进原图K_n，记其顶为x_0，x_1，x_2，…，x_n，得一新的完全图K_{n+1}，此时$n+1$是一个偶数，据上段结果，原图K_n的边，分属n个互质的并列集，E_1，E_2，…，E_n，每个并列集的边染以一种颜色，K_n的边便均已染色，且相邻的边互不同色。

（证毕）

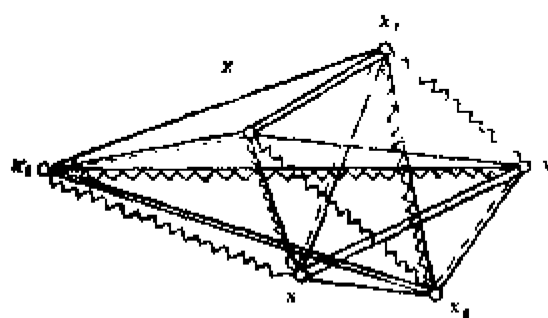


图 12 1

K_n 的最高次是$\Delta=n-1$，定理12.1可以用最高次Δ来表达如下：

推理12.1，设K_n的最高次是Δ，则其着色指数

$$q(K_n)=\begin{cases}\Delta & \text{当}n\text{是偶数}\\ \Delta+1 & \text{当}n\text{是奇数}\end{cases}$$

关于两分图，有下

定理12.2 多重的两分图，$G=(X,Y;E)$，其最高次为Δ，则 $q(G)=\Delta$。

证 尽可能将X里的点和Y里的点联边，设$|X|<|Y|=\Delta'$，在X里增加$\Delta'-|X|$个新点，自这些新点到Y里的每一点联边，得新的两分图G'（当然，根据实际情况也可以同样在Y里增加新点）：

（1）G'是Δ'正规的。

（2）G'包含G作为一个部份子图。

由于G'是Δ'-正规的，故G'有Δ'个1—因子①，这些1—因子，都是G'的一个并列集，且每个1—因子，其中所含的原图G的边，构成G的一个并列集，但在G，其最高次为Δ，故由G'在G里所导出的并列集共有Δ个，命其为E_1，E_2，…，E_Δ，将这些并列集的边，各染以一种颜色，便得G的一个Δ—边—着色，亦即 $q(G)=\Delta$。

（证毕）

以上只是研究了一些特殊图（完全图与两分图）的着色指数，设已给一个多重图G，无环，其着色指数将是什么？以下

①取出边集$\{(x'_i, y_i)/i=1,2,\cdots,\Delta'\}$，便得$G'$的一个1—因子。再取出边集$\{(x_i', y'_{i+1})/i=1,2,\cdots,\Delta\ (\mathrm{mod}\,\Delta')\}$也是一个1—因子，继续这样做，可以求得$\Delta'$个1—因子。

将对这个问题进行研究。

定理12.3 （Vizing,〔1964①〕）设G是一个无环的多重图，具m条边，极大次是h，t是极大并列集的维，则

$$q(G)\geqslant \max\left\{h,\ \left[\frac{m}{t}\right]^{*}\right\}。$$

证 设图G的边是q－边－着色的，设α_1，α_2，…，α_q是这q种颜色，设涂染这些颜色的边集，分别是E_1，E_2，…，E_q，则因$|E_i|\leqslant t$，故

$$m=|E_1|+|E_2|+\cdots+|E_q|\leqslant qt,$$

故 $\qquad q\geqslant m/t$ 因而 $q\geqslant\left[\frac{m}{t}\right]^{*}$。

又原有 $q(G)\geqslant h$，故定理成立。

（证毕）

定理12.4 （不着色引理）设G是一个无环的多重图，其$q(G)=q+1$，设除一边〔a，b〕$_0$未染色以外，已用q种颜色（α_1，α_2，…，α_q）涂染了G的边。又用C_x表示，在顶x上涂染各边所用颜色的集合，则

$$|C_a\cup C_b|=q,\quad |C_a\cap C_b|=d_G(a)+d_G(b)-2-q,$$

$$|C_a-C_b|=q-d_G(b)+1,\quad |C_b-C_a|=q-d_G(a)+1。$$

证 在已用的q种颜色中，没有一种可在C_a与C_b中，均不出现，否则边〔a，b〕$_0$便可涂以这种颜色，因而$q(G)=q$，这和原设矛盾，于是有

$$q=|C_a\cup C_b|=|C_a\cap C_b|+|C_a-C_b|+|C_b-C_a|,$$

$$d_G(a)-1=|C_a|=|C_a\cap C_b|+|C_a-C_b|,$$

$$d_G(b)-1=|C_b|=|C_a\cap C_b|+|C_b-C_a|。$$

---

①V G Vizing, On an Estimate ob the Chromatic class of a p—graph (Russian) Diskret Analiz 3,1964, 25～30.

由以上三式，解出 $|C_a \cap C_b|$，$|C_a \quad C_b|$，$|C \quad C_a|$，便得欲证。（证毕）

定理12.5 设图G是一个形如圈 $[x_1, x_2, \cdots, x_n, x_1]$ 的图，但其相邻点之间，可能含有多条边，若 G 的边数是m，极大次是h，则

$$q(G)=\begin{cases} h & \text{当}n\text{是偶数，} \\ \max\left\{h, \left[\dfrac{2m}{n-1}\right]^*\right\} & \text{当}n\text{是奇数。} \end{cases}$$

证 当n是偶数，图G是一个两分图，据定理12.2，便有 $q(G)=h$。

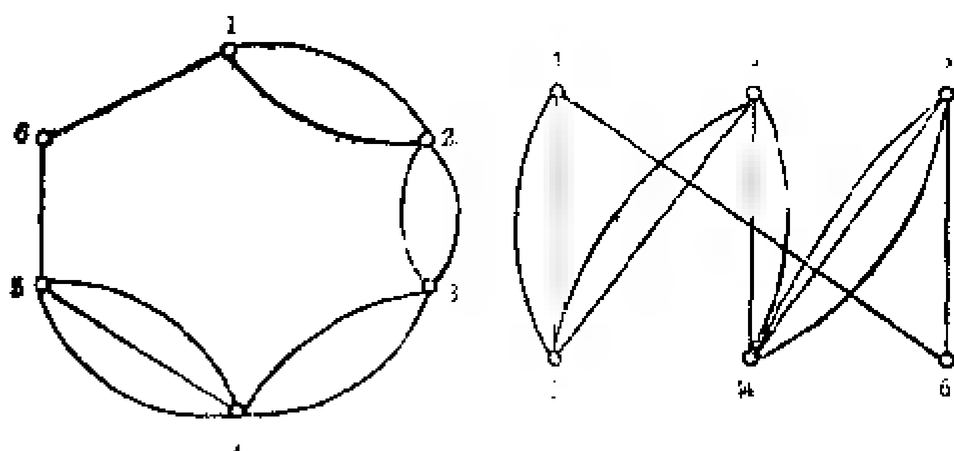


图12.2

当n是奇数，设$n=2k+1$，由于G是这样的圈：$[x_1 x_2 \cdots x_{2k+1} x_1]$ 其极大并列集的维是$t=k$，故据定理12.3有

$$q(G) \geqslant \max\left\{h, \left[\frac{m}{k}\right]^*\right\}=\max\left\{h, \left[\frac{2m}{n-1}\right]^*\right\}。$$

欲证上式中的等号成立，往证

$$q(G) \leqslant \max\left\{h, \left[\frac{m}{k}\right]^*\right\}。$$

以下用对m的归纳法。

首先，设$m=2k+1$，（即设在相邻点之间，不再有其他的边，G是一个奇圈）则最大次$h=2$，且

$$\left[\frac{m}{k}\right]^* = \left[\frac{2k+1}{k}\right]^* = 3。$$

但在此时，确有　$q(G)=3$，

$$q(G)\leqslant \max\left\{h,\ \left[\frac{m}{k}\right]^*\right\}。$$

设$m>2k+1$，设定理对于一切这样的图，其边数少于m的均成立，往证定理对于边数等于m的图也成立。

1．自G去掉某一边〔a,b〕。使a,b二点仍相邻（因$m>2k+1$，这总是可能的）得图G'，G'仍是G的形式，其边数$m'=m-1<m$，最高次$h'\leqslant h$，$\left[\frac{m'}{k}\right]^*\leqslant\left[\frac{m}{k}\right]^*$，由于$G'$仍是$G$的形式，而$m'<m$，据归纳假设，定理对于$G'$能成立，故

$$q(G')=\max\left\{h',\ \left[\frac{m'}{k}\right]^*\right\}。$$

但
$$\max\left\{h,\left[\frac{m}{k}\right]^*\right\}\geqslant\max\left\{h',\ \left[\frac{m'}{k}\right]^*\right\},$$

故可用　$q=\max\left\{h,\ \left[\frac{m}{k}\right]^*\right\}$种颜色，涂染$G'$的边使相邻边各不同色。命$C=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_q)$为此$q$种颜色所成的集合，又当$\alpha\in C$，命$E_\alpha$为染以颜色$\alpha$的各边所成的集合，据上引理，用一种新的颜色，涂染边〔ab〕，图G的各边，便已可用$q+1$种颜色来涂染，使相邻边不同色，由此，可知$q(G)\leqslant q+1$，以下往证$q(G)=q+1$将导致矛盾，因而$q(G)=q$，于是定理得证。

2．设$q(G)=q+1$，往证，将出现矛盾。

首先，在C里总有一种（至少）颜色γ，其$|E_\gamma|<k$，否则

$$m-1=\sum_{\alpha\in C}|E_\alpha|\geqslant kq\to q\leqslant\frac{m-1}{k}<\frac{m}{k},$$

这和 $q \geqslant \left[\begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right]^*$ 矛盾。

其次，在上引理中，已证明在 $C_a \cup C_b$ 中各种颜色，均应出现，故上面所取的颜色 γ，或在 C_a 内，或在 C_b 内，或在 $C_a \cap C_b$ 内，即 $\gamma \in C_a - C_b$（或 $\gamma \in C_b - C_a$）或 $\gamma \in C_a \cap C_b$。前两种情况是同类型的，故此时只须进一步研究两种情况：

情况1　$\gamma \in C_b - C_a$　即 $\gamma \in C_b$，$\gamma \notin C_a$，

但
$$|C_a - C_b| = q - d_G(b) + 1 \geqslant h - d_G(b) + 1 \geqslant 1,$$
故在点 a 上必有边染以颜色 α，$\alpha \neq \gamma$（因颜色 γ 在点 a 不出现）。命 $G(\alpha, \gamma)$ 表示 α 色的边与 γ 色的边所构成的 G 的部份图，其过点 b 的联接分子图，应是一个初级链，取 b 为一个端点（因 $\alpha \notin C_b$），这个链不可能含顶 a，否则这个链将有 $2k$ 条边而染以颜色 γ 的边将有 k 条，这与 $|E_\gamma| < k$ 矛盾。在这条链上，将颜色 α 与 γ 互换，图的其他边的颜色不变，这仍是一种 γ—边　着色方法，但在此时，$\gamma \notin C_a$，$\gamma \notin C_b$，故可将边 $[a, b]_0$ 染以颜色 γ，C 成为 G 的一组边着色，但 $|C| = q$，这是矛盾。

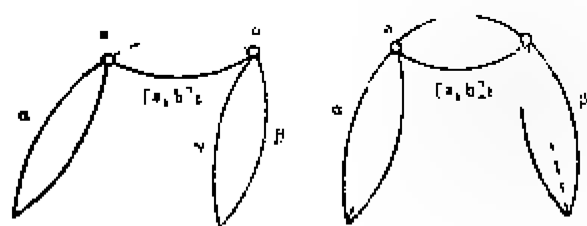


图12.3

情况2　$\gamma \in C_a \cap C_b$，自定理 12.4 可知有颜色 $\alpha \in C_a - C_b$，$\beta \in C_b - C_a$，且 $\gamma \neq \alpha$，β。

命 $G(\beta, \gamma)$ 是图 G 中 β 色的边与 γ 色的边构成的部份图，其含顶 a 的联接分子图是一条链 $\mu_{\beta\gamma}[a, x]$ 若无 γ 色的边联接 a，b 二点，则此链不过点 b，若有 γ 色的边联接 a 与 b，则此链也过 b。在此二种情况链均自 γ 起头，将颜色 γ 与 β 互换，图 G 其他边的颜色不变，得另一着色方法，仍用颜色组 C，且 $|E_\gamma| \leqslant k$ 仍成立，但在此时，γ 仅在 b 点出现，不复在点 a 出现，即 $\gamma \in C_b - C_a$，情况 2 乃变为情况 1，上面已证明这种情况是不能成立

的，故$q(G)=q+1$不能成立，于是

$$q(G)\leqslant q \quad \max\left\{ i . \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}^{*} \right\}。$$

（证毕）

定理12.6 设G是一个无环的多重图，命$[a,b]$是其一边，$G'=G-[a,b]_0$，设G'可q—边—着色，$q\geqslant d_G(a)$，$q\geqslant d_G(b)$，且设 $x\in\Gamma_{G'}(a)\Rightarrow d_{G'}(x)+m_{G'}(a,x)\leqslant q$，则图$G$可$q$—边—着色。

证 设图G不能q—边着色，显见$q(G)=q+1$，因G'可q—边—着色，增加一种新颜色，以涂染边$[a,b]_0$即足。以下往证这将导致矛盾。

1．设C_x表示顶$x\in\Gamma_{G'}(a)$上的颜色组，按定理假设，有 $|C-C_x|=q-d_{G'}(x)\geqslant m_{G'}(a,x)$．

故可将边组$m_G(a,x)$向颜色组C作一对应$g(e)$，使、

(i) $e_i=[a,x]_i\Rightarrow g(e_i)\notin C_x$。

(ii) $e_k=[a,x]_k, e_j=[a,x]_j, k\neq j\Rightarrow g(e_k)\neq g(e_j)$。

2．在C_a内定义不同的颜色序列γ_0，γ_1，γ_2，…如次

命$\gamma_0\in C_a-C_b$，由于$|C_a-C_b|=q-d_G(b)+1\geqslant1$，这样的$\gamma_0$是存在的，命$e_1=[a,x_1]_1$是染以颜色$\gamma_0$的边。

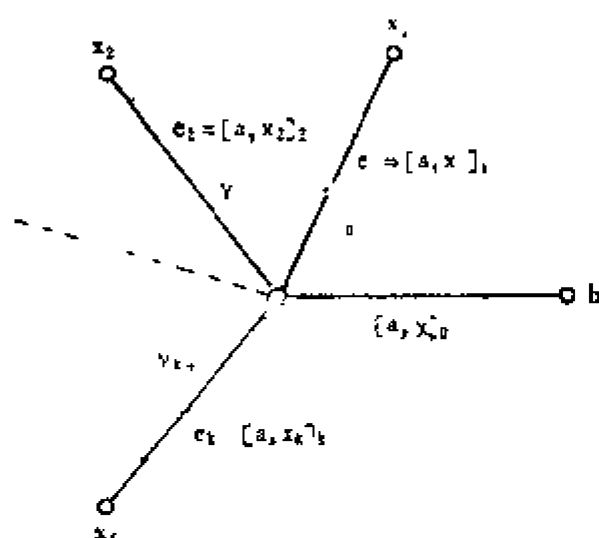


图 12.4

命$\gamma_1=g(e_1)$，显见$\gamma_1\neq\gamma_0$，因$\gamma_1\notin Cx_1$而$\gamma_0\in Cx_1$，但$\gamma_1\in C_a$否则由于$\gamma_1\notin Ca$，$\gamma_1\notin Cx_1$，可将$[a,x_1]_1$改染γ_1，边$[a,b]_0$染以γ_0，G便可q—边—着色。

设染色γ_1的边是$e_2=[a,x_2]_2$，并命$\gamma_2=g(e_2)$，若$\gamma_2=\gamma_1$或γ_0，上

序列终止。否则考察染以颜色γ_2的边e_3 $[a,x_3]$，命$\gamma_3=g(e_3)$，…如此类推。

在一般情况，设已找出边e_k $[a,x_k]_k$，若$\gamma_k=g(e_k)$属于序列$\{\gamma_0,\gamma_1,\cdots,\gamma_{k-1}\}$，序列终止，若$\gamma_k\neq\gamma_0,\gamma_1,\cdots,\gamma_{k-1}$，则$\gamma_k\in C_a$，否则，由于$\gamma_k\notin C_a$，$\gamma_k=g(e_k)\notin C_{x_k}$，可将点$a$上各边改染颜色如次：

$[a,x_k]_k$改染颜色r_k

$[a,x_{k-1}]_{k-1}$改染颜色r_{k-1}

⋮

$[a,b]_0$改染颜色γ_1

G便可q—边—着色，这是矛盾。

因图G是有限的，此过程必在一边$e_k=[a,x_k]_k$上终止且使有　　$g(e_k)=\gamma_j$，$j<k$。

考虑由不同的边组成的序列：

$[a,b]_0$，$[a,x_1]_1$，$[a,x_2]_2$，…，$[a,x_k]_k$，

其中顶点b，x_1，x_2，…，x_k不一定全不相同，但由(ii)知：$x_j\neq x_k$，因为$e_k\neq e_j$而且$g([a,x_k]_k)=g([a,x_j]_j)$。

3.命　$\beta\in C_b-C_a$（据定理12.4这样的β是存在的），作图$G(\beta,\gamma_j)$

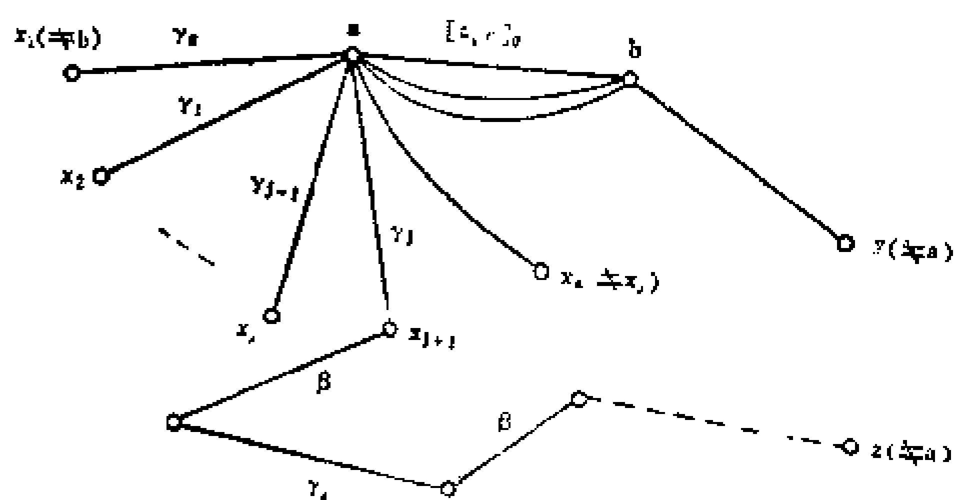


图　12.5

考虑这个图含点a的那个联接的部份图，这个图是一个β与γ_i相间的链，且因$\beta \notin C_a$，a是一个端点，记此链为$\mu_{\beta\gamma_i}[a,z]$。x_k与x_i二点，最多只有一点能在此链上，(因$\gamma_i \notin C_{x_i}$，$\gamma_i \notin C_{x_k}$) 若有一点在链上，则这点将是一个端点。

现分四种情况来进行研究：

情况1　$\gamma_i \neq \gamma_0$，$z \neq x_i$，显见$x_i \notin \mu_{\beta\gamma_i}(a,z)$，在此链上可将颜色$\gamma_i$与β交换，而使$\gamma_i \notin C_a$，$\gamma_i \notin Cx_i$，于是便可将$[a,x_i]_i$改染$\gamma_i$，$[a,x_{i-1}]_{i-1}$改染$\gamma_{i-1}$，…，$[a,x_1]_1$改染$\gamma_1$于是$[a,b]_0$便可染以颜色$\gamma_0$，因而图$G$便可$q$—边—着色，这是矛盾。

情况2　$\gamma_i \neq \gamma_0$，$z = x_i$　此时$x_k \notin \mu_{\beta\gamma_i}[a,z]$在此链上，可将颜色β与$\gamma_i$交换，使$\gamma_i \notin C_a$又原有$\gamma_i \notin Cx_k$，故可将$[a,x_k]_k$改染颜色$\gamma_i$，$[a,x_{k-1}]_{k-1}$改染颜色$\gamma_{k-1}$，…$[a,x_{i+1}]_{i+1}$改染颜色$\gamma_{i+1}$，$[a,x_i]$改染颜色β，$[a,x_{i-1}]_{i-1}$改染颜色$\gamma_{i-1}$，…$[a,x_1]_1$改染$\gamma_1$，而$[a,b]_0$染以$\gamma_0$，于是图$G$便可$q$—边—着色，这是矛盾。

情况3　$\gamma_i = \gamma_0$，$z \neq b$，此时$b \notin \mu_{\beta\gamma_0}[a,z]$，在此情况，可沿链$\mu_{\beta\gamma_0}[a,z]$，交换颜色β与$\gamma_0$而边$[a,b]_0$便可染以颜色$\gamma_0$，这是矛盾。

情况4　$\gamma_i = \gamma_0$，$z = b$，沿链$\mu_{\beta\gamma_0}[a,b]$交换颜色β与γ_0，于是便可将$[a,x_k]_k$染以颜色γ_k，$[a,x_{k-1}]_{k-1}$染以γ_{k-1}，…$[a,x_1]$染以γ_1，而$[a,b]_0$染以β，这也是矛盾。

根据以上研究，$q(G) = q+1$不能成立，故G可q—边—着色。

(证毕)

推理12.6： 设$G=(X,E)$是一个无环的多重图，并设

$$d_G^*(x) = d_G(x) + \max_{y \in X} m_G(x,y)$$

则
$$q(G) \leqslant \max_{x \in X} d_G^*(x).$$

证 设G'是G的一个部份图，其

$$q(G')\leqslant q \quad \max_{x\in X} d_G^*(x),$$

且具尽可能多的边数，设$G'=G$，则推理已证；设$G'\neq G$，则在$G-G'$中至少将有一边$[a,b]$，命$G''=G'+[a,b]$。对每一$x\in X$，恒有

$$d_{G'}(x)+m_{G'}(a,x)\leqslant d_G^*(x)\leqslant q,$$

$$d_{G''}(x)\leqslant d_G(x)\leqslant d_G^*(x)\leqslant q。$$

据定理12.6G''可q—边一着色，即$q(G'')\leqslant q$，但G''比G'多一边，这和原设G'具尽可能多的边相矛盾。

（证毕）

推理12.6$_b$ （Vizing定理[1964]）设G是一个无环的多重图。其重复度是

$$\max_{x,y} m_G(x,y)=p,$$

极大次是h，则

$$q(G)\leqslant h+p.$$

证 $d^*(x)=d_G(x)+\max_{y\in X} m_G(x,y)\leqslant h+p,$

故 $$\max d_G^*(x)\leqslant h+p,$$

据推理12.6$_a$乃有

$$q(G)\leqslant \max d_G^*(x)\leqslant h+p。$$

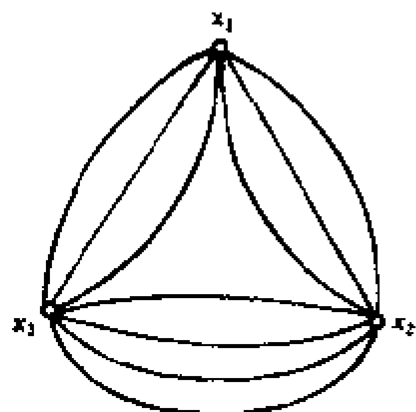


图 12.6

例 图12.5，其$p=4$，$h=7$，$p+h=11$。该图的每两边都相邻，故其$q(G)=3+3+4=10<11$。

推理12.5$_c$ 设G是一个单纯图，其极大次是h，则

$$h\leqslant q(G)\leqslant h+1$$

证 图G是单纯图，故其重复度是1，极大次是h，据推理12.6$_D$有

$$q(G)\leqslant h+1,$$

但 $$q(G)\geqslant h,$$

故 $$h\leqslant q(G)\leqslant h+1。$$

推理12.6$_J$ 设G是一个无环的多重图，其极大次是$h=3$，则 $q(G)=3$或4。

证 设G含有两点x与y，其$m_G(x,y)=3$，则由于$h=3$，G内不能再有边过x或y，这将是G的一个隔开的联接的分子图，其边可用3种颜色加以涂染。

设在图G中对任二点x与y，皆有$m_G(x,y)\leqslant 2$，在所有$m_G(x,y)=2$处去掉一边，得单纯图G'，据推理12.6$_J$，$q(G')\leqslant 4$，在$G-G'$中，每一边最多接触三种颜色，故可用第四种颜色来涂染该边，故$q(G)$最大是4。

（证毕）

定理12.7 （O.Ore,〔1968〕①）设G是一个无环的多重图，其极大次是h，则

$$q(G)\leqslant\max\left\{h,\ \max_{(x_1,x_2,x_3)}\left[\frac{1}{2}\left(d_G(x_1)+d_G(x_2)+d_G(x_3)\right)\right]\right\}$$

其中括号内的极大，是对一切长度为2的初级链〔x_1，x_2，x_3〕而取的。

证 设图G的边数是m，可以验证定理对于$m=1$，2，3是成立的，因此，可考虑用对m的归纳法来证本定理。设定理对于一切边数小于m的图均成立，往证定理对于具m条边的

①O Ore, the four-Color Problem, Academis Press New york 1968

图也成寸。

命

$$q=\max\left\{h,\ \max_{x_1,x_2,x_3}\left[\frac{1}{2}\left(d_G(x_1)+d_G(x_2)+d_G(x_3)\right)\right]\right\}$$

自G任去一边$[a,b]$。得图G'，G'现有$m-1$条边，对于图G'，据归纳假设，定理是成立的，故

$$q(G')=q'=\max\left\{h',\ \max_{(x_1,x_2,x_3)}\left[\frac{1}{2}\cdot\left(d_{G'}(x_1)+d_{G'}(x_2)+d_{G'}(x_3)\right)\right]\right\},$$

但 $q\geqslant q'$，由于G'仅比G少一边，G'既可q'—边—着色，当然也可q—边—着色，故G可$q+1$—边—着色。若$q(G)=q+1$，往证将导致矛盾。

1． 因$q\geqslant h$，故据边未着色的引理，有

$|C_a-C_b|\geqslant q-d_G(b)+1\geqslant h-d_G(b)+1>0$，

$|C_b-C_a|>0$。

设 $\alpha\in C_a-C_b$，$\beta\in C_b-C_a$，且边$[a,a_1]$是染以颜色α的。

2． 往证

$C_{a_1}\supset C_b-C_a$。

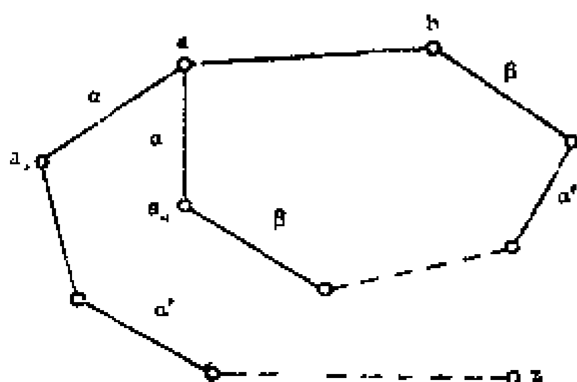


图 12.7

作部份图$G(\alpha,\beta)$（即在$G'=G-[a,b]$中，涂以颜色α，β诸边所构成的部份图），此部份图包含顶a的联接分子图，不能是孤立点，也不能是一个偶圈（否则颜色β将属于C_a-C_b），只能是一条自a出发的链，这条链必含顶点b，否则在这条链

上，对换颜色α与β，颜色α可自顶点a上移去，于是边$[a,b]$。便可染以颜色α，这和$q(G)=q+1$矛盾，但自a出发的链过a_1，故$\beta\in C_{a_1}$，即$C_{a_1}\supset C_b-C_a$。

3. 往证$C_{a_1}\supset C_a-C_b$。

设$C_{a_1}\not\supset C_a-C_b$，则将有颜色$\alpha'\in C_a-C_b$而$\alpha'\notin C_{a_1}$。命$[a,a_2]$是一边染以颜色$\alpha'$的，如第二步所论，$G(\alpha',\beta)$含$a$点的联结分子图是一个以$a$、$b$为端点的链，因而$G(\alpha',\beta)$含$a_1$点的联结分子图是以$a_1$点为端点的链，譬如链$\mu[a_1,z]$（见图12.7），它既不含点$a$，又不含点$b$。又显然有$z\neq a_1$，因为$\beta\in C_{a_1}$，$\alpha'\notin C_{a_1}$。在$\mu[a_1,z]$上可交换$\alpha'$与$\beta$，于是$[a,a_1]$可改染颜色$\beta$，因而$[a,b]$。可改染颜色$\alpha$，这也和$q(G)=q+1$矛盾，故$C_{a_1}\supset C_a-C_b$。

4. 由2与3乃有

$$C_{a_1}\supset(C_a-C_b)\cup(C_b-C_a),$$

但由于 $$(C_a-C_b)\cap(C_b-C_a)=\varnothing,$$

故 $$\begin{aligned}d_G(a_1)&=|C_{a_1}|\geqslant|C_a-C_b|+|C_b-C_a|\\&\geqslant q-d_G(b)+1+q-d_G(a)+1\\&=2q+2-d_G(a)-d_G(b)。\end{aligned}$$

于是 $$q+1\leqslant\frac{1}{2}\Big(d_G(a_1)+d_G(a)+d_G(b)\Big),$$

或 $$q<\frac{1}{2}\Big[d_G(a_1)+d_G(a)+d_G(b)\Big],$$

这和q的定义相矛盾，故$q(G)=q+1$不能成立，于是$q(G)=q$。

（证毕）

推理12.7 （Shannon[1949][①]）设G是一个无环的多重图，极大次为h，则

$$q(G)\leqslant\left[\frac{3h}{2}\right]。$$

证 据定理12.7，$q(G)\leqslant\max\left\{h,\ \max\frac{1}{2}\left[d_G(x_1)+d_G(x_2)+d_G(x_3)\right]\right\}$

但 $$\frac{1}{2}\left[d_G(x_1)+d_G(x_2)+d_G(x_3)\right]\leqslant\frac{3h}{2}$$

$$h+\frac{h}{2}>h$$

故 $$q(G)\leqslant\left[\frac{3h}{2}\right],$$

（证毕）

读者应注意，本推理的上限，对任给的h均可达到。见下例：作三角形a、b、c，使在a、b之间共有$\left[\frac{h}{2}\right]^*$条边，在$a$、$c$与$b$、$c$之间，共有$\left[\frac{h}{2}\right]$条边。

---

① C. E. Shannon, A theorem on coloring the lines of a network, J. Math. Phys. 28 (1949), 148~151

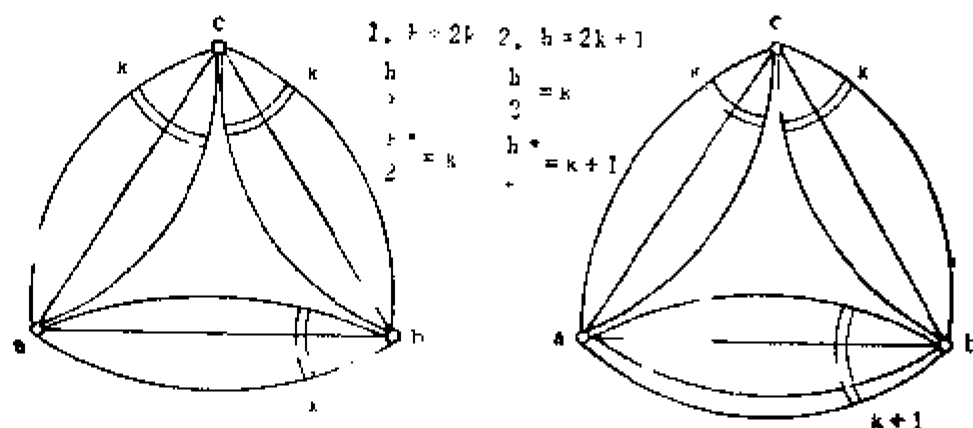


图 12 8

§2 图的分类

据推理12.6$_c$，当已给图G单纯，无环，点的最高次是Δ，则G的着色指数$q(G)$是$\Delta \leqslant q(G) \leqslant \Delta+1$。

我们在§1里已见到有些图，其着色指数是

$$q(G)=\Delta,$$

也有些图，其着色指数是

$$q(G)=\Delta+1。$$

前一类图称为是第一型的，后一类图称为是第二型的，一个图究竟要满足什么条件，才是第一型或第二型的，这个问题并没有解决。譬如偶圈是第一型的，奇圈则是第二型的，柏特森图是第二型的，但所谓广义的柏特森图④则都是第一型的，可参看：

F.Castagna and G. Prins: Every generalized Petersen graph has a tait coloring pacific J. Math.

40 (1972) 53—58

于此，有下简单的

定理12.8 设图G，单纯，无环，n个顶，m条边，极大次是Δ，

④所谓广义的柏特森图，含一个外圈共n个幅点，又含一个内圈，其上共有n个点，自这些点到相应的幅点联边，并自内圈上每一点到相应的第二个幅点的对应点联边，得广义柏特森图$P(n, 2)$

若$m>\Delta\cdot\left[\frac{n}{2}\right]$，则图$G$是第二型的。

证 这个定理所列的条件只充分而不必要。

设G是第一型的，Δ种颜色可以涂染G的边，使相邻边不同色，则G的边可分成Δ个组，每组染以一种颜色，每组最多只能包含$\left[\frac{n}{2}\right]$条边，否则，其中必有相邻的，于是G最多只能包含$\Delta\cdot\left[\frac{n}{2}\right]$条边，这和假设矛盾。

（证毕）

例如K_5，其$n=5=2r+1$，故

$$m=C_{2r+1}^{2}=(2r+1)\cdot(2r)/2=r(2r+1)=2r^2+r.$$

$$>2r\cdot\left[\frac{n}{2}\right]=2r\cdot r=2r^2。\quad（当r>1）$$

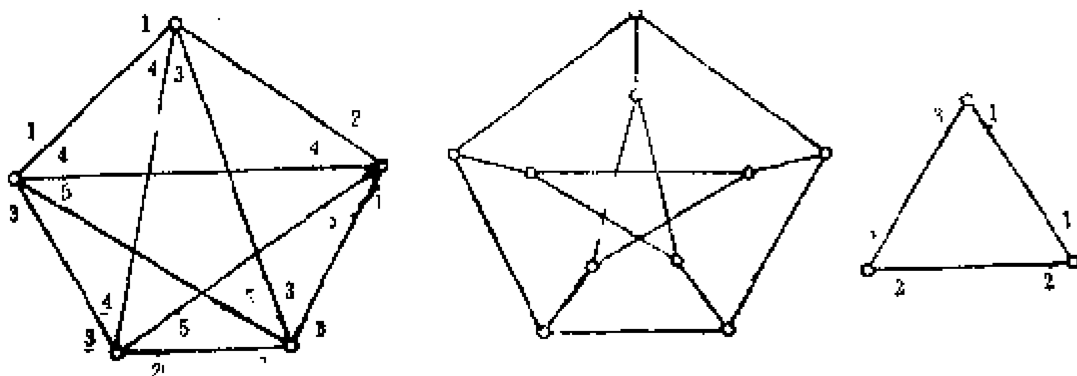


图 12.9

又如柏特森图也是第Ⅰ型的。

推理12.8₁ 设G是一个奇阶的正规图，则G是第二型的。

证 取$n=2\lambda+1$，各顶上的次数$=k$，则

$$m=k\cdot n/2=k\cdot\lambda+k/2,$$

但 $$k\cdot\left[\frac{n}{2}\right]=k\cdot\lambda。$$

当$k\geqslant 2$，有$m>k\cdot\left[\frac{n}{2}\right]$. 据定理12.8乃有本推理。

（证毕）

下面举两个不满足推理条件的第Ⅰ型的图：

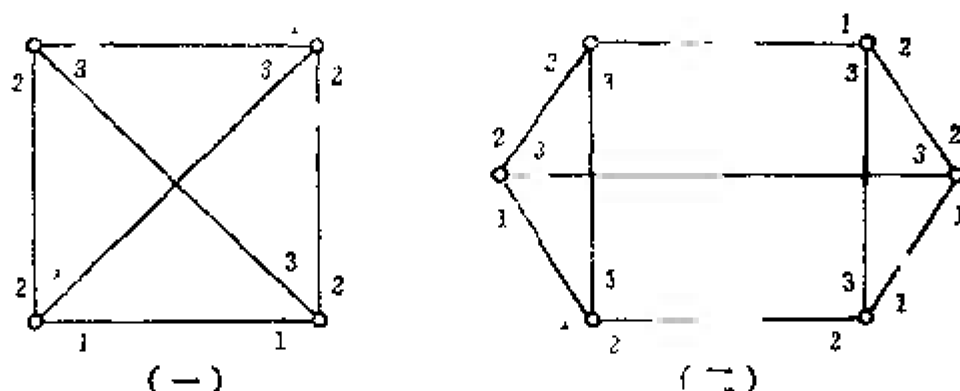


图 12.10

这两个图的着色指数$q(G)$都是$3=\Delta$，但读者须注意，这两个例不能据以为推理的条件，也是必要的。

推理12.8$_b$ 设H是一个奇阶的正规图，最高次是Δ，而图G乃自H任意去掉不多于$\frac{\Delta}{2}-1$条边所得的图，则G是第二型的。

证 设H的阶是$n=2\lambda+1$，G的边数是m，则

$$m>\Delta\cdot(2\lambda+1)/2-\left(\frac{\Delta}{2}-1\right)$$

$$=\lambda\Delta+\frac{\Delta}{2}-\frac{\Delta}{2}+1=\lambda\cdot\Delta+1。$$

但 $\Delta\cdot\left[\frac{n}{2}\right]=\Delta\cdot\lambda$，故$m>\Delta\cdot\left[\frac{n}{2}\right]$。

据定理12.8知G是第二型的。

（证毕）

推理12.8$_c$ 设H是一个偶阶的正规图，G是任一图，为在H的一边上加进一顶所得的图，则G是第二型的。

证 设阶$n=2\lambda$，图H k次正规，故H共有$k\cdot\frac{n}{2}=k\cdot\lambda$条边，在$H$的任一边上加进一顶，所得图$G$，其边数是

$m=k\lambda+1$ 于是

$$m > k \cdot \left[\frac{n}{2} \right] k\lambda。$$

据定理12.8，乃有本推理。 （证毕）

P. Erdos 与R.J. Wilson 已证，几乎所有的图都是第一型的，设取$P(n)$为一个图是第一型的概率，则当$n\to\infty$时，有$P(n)\to 1$。在不超过6阶的143个联接图中，仅有下面8个是第二型的。

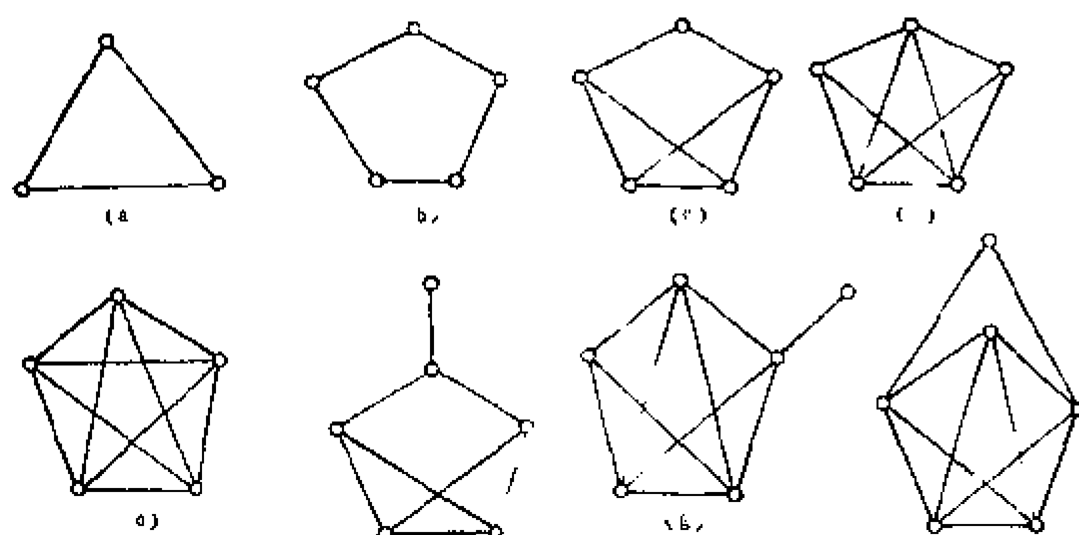


图 12 11

这里的(e)，(d)，(c)分别属于上述三个推理的三种类型。

最后，下二类图将予以陈述，如读者有兴趣，可参看原文。

一、麦类迪斯图类，设$n\geqslant 2$，m是与$n/3$最接近的整数，麦类迪斯取柏特森图定义下类型的图，在柏特森图中，将每一顶代以$K_{n,n-1}$，然后将其联接起来。

麦类迪斯已证，这类图G_n是n—联n次正规的，但不是哈密尔顿型的，且当m是偶数时，G_n是第一型的，当m是奇数时G_n是第二型的，参看：

G.H.J.Meredith: Regular n-valent, n-connected non-Hamiltonian non-n-edge colorabe graphs.

J. combinatoriel theory 14. (1973) 55 -60.

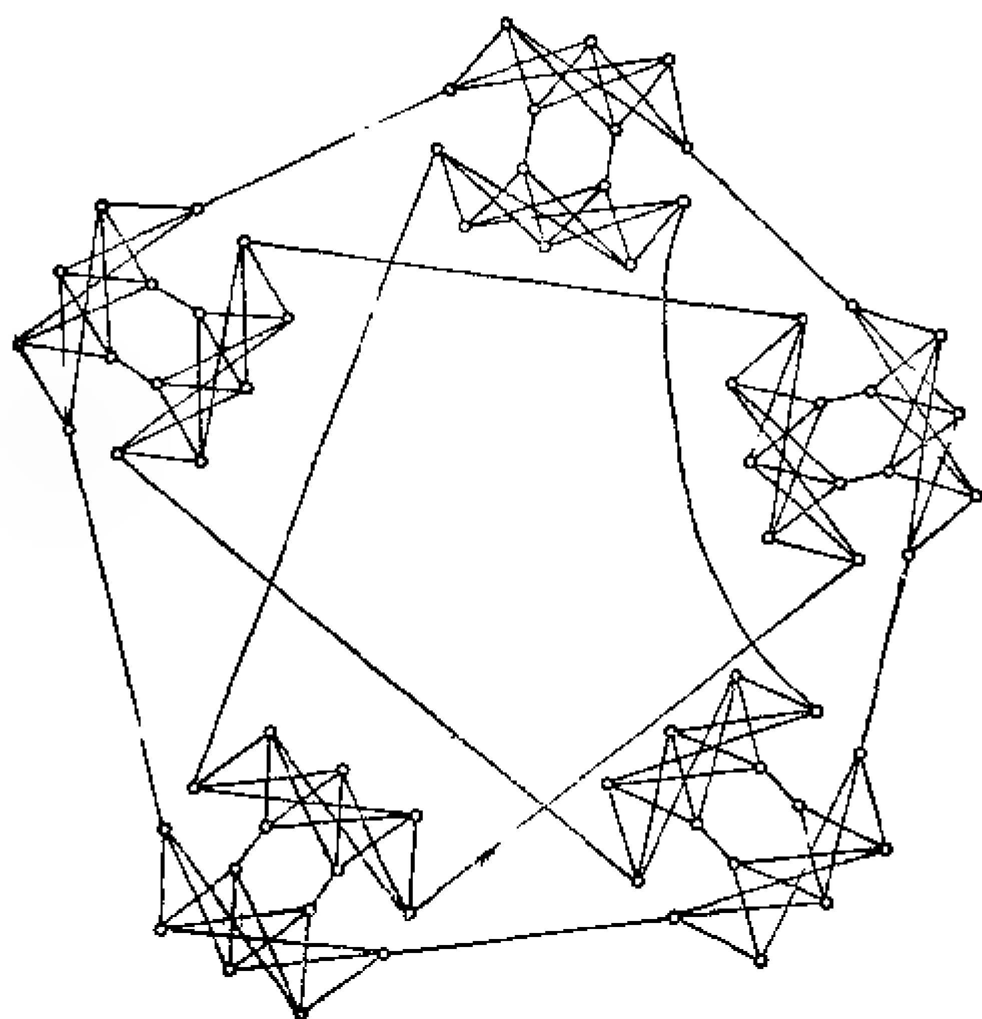


图 12 12

第二型的三次正规图是很少见的，直到1975年，人们仅知有四个这样的图。柏特森图是第一个，Blawusa制作的18点图是第二个，Szekers制作的50点图是第三个，Tutte制作的210点图是第四个，易撒克斯论述了两个这类图的无穷叙列，第一个叙列包含上述的四个图，读者如有兴趣，可参看：

R. Issacs: Infinite families of nontrival trivelent graphs which are not Tait colorable.

Amer. math. monthly 82(1975) 221--239.

§3 边临界图[①]

已给图G,联接无环，极大次是Δ,色指标$q(G)=\Delta+1$,在图G中，任去一边，色指标$q(G)$便降为Δ，这样的图，定义为$\Delta+1$—临界的，临界图有以下重要特性。

性质Ⅰ Δ—临界图不能含断点。

证 自一点作极大的二色交错链，在链上交换所用到的二色(这种交换，不改变边着色的正规性。所谓边着色的正规性即边着色之后，任二相邻边均不同色)，若图的着色指数$q(G)=m$，$d(x)\leqslant m$(x是图上任一点)则可用上述方法，使在点x上的边任意染以m种颜色中某些颜色。

设性质Ⅰ不成立，即$m+1$—临界图G有断点x,在G中去掉点x，图G将分成有限个联接的分子图H_i $(i=1, 2,\cdots,k)$(其中包含点x)，由于G的临界性，对每一H_i，均有$q(H_i)\leqslant\Delta$，用Δ种颜色染H_i的边，且使在点x上的边各不同色，这样，图G便已用Δ种颜色，正规地加以涂染，于是$q(G)=\Delta$，这是矛盾。 (证毕)

性质Ⅱ 设G是$\Delta+1$—临界的，a,b是G中任二相邻点，则$d_G(a)+d_G(b)\geqslant\Delta+2$。

证 自G除去边$[a,b]$,由于G的临界性，命$G'=G-[a,b]$则$q(G')\leqslant\Delta$，在图G'中，应有$\delta(a)\cap\delta(b)=\phi$[②],否则，便可在$\Delta$种颜色中，有色涂染边$[a,b]$，因而$q(G)=\Delta$，这是矛盾，于是 $d_G(a)-1+d_G(b)-1\geqslant\Delta$,

故 $$d_G(a)+d_G(b)\geqslant\Delta+2。$$

(证毕)

---

①、本节内容，都是Vizing的科研成果，见：V.G.Vizing: the chromatic class of a multiglaPh. Cylernetics 1 no 3 (1965) 32—41

②$\delta(x)$表示，当图G已着色后，在点x上不存在的颜色所成的集合。

性质Ⅱ 设图G是$\Delta+1$—临界的，则每一顶至少和两个极大次顶相邻。

证 设定理不成立，在临界图G中，任取顶a，在与a相邻的顶中，次数为Δ的顶少于两个，再设b是a的邻点中次数最大的顶，于是其他的邻点，次数均不超过$\Delta-1$。除去边$[a,b]$，由于G的$\Delta+1$—临界性，$G'=G-[a,b]$可Δ—边—着色，且$\Delta\geqslant d_G(a)$，$\Delta\geqslant d_G(b)$，$\Delta\geqslant d_{G'}(x)+m_{G'}(a,x)$，（其中$x\in\Gamma_{G'}(a)$），据定理12.6 G可Δ—边—着色，即$q(G)=\Delta$，这是矛盾。

（证毕）

在本节所引的V.G.Vizing，还有关于多重图G边着色的其他性质和一些猜想，读者如有兴趣，可参看原文。这里就不多加论述了。

（二）点的着色

§1 图的色数

任给单纯图$G=(X, E)$，用最少种颜色，来涂染图G的顶，使相邻的顶不同色，这个最少的颜色种数，称为图G的**着色数**或简称**色数**，记为$\gamma(G)$，因为最主要的要求是相邻顶不同色，故总可假定图G是单纯的，若$\gamma(G)\leqslant k$，则k种颜色总可用来涂染图的顶点，满足要求，这时便称图G是**可—k—着色的**，所谓可k—着色，实际上是将图G的顶分成k个互质且互不相邻的稳固集（S_1，S_2，…，S_k），每一稳固集里的顶，染以一种颜色，每二相邻顶便都没有同色的，很明显，偶圈可—2—着色，奇圈则可—3—着色，K_n的n个顶，两两都相邻，故K_n是可—n—着色的。

例如在一个学校里，学期结束，要举行考试，每个学生必须参加其所学习每个课程的考试，设X表示课程集合，$x\in X$是

某一课程，$\Gamma(x)\subset Y$是学习课程x的学生集合，作图$G=(X,E)$若$\Gamma(x)\cap\Gamma(y)\neq\varnothing$，便联边$[x,y]$，这表示$x$，$y$两个课程，不能排在同一时间内举行考试，于是图$G$的顶点的每一着色方法，便代表一种考试表的编排方法，要求最少次的考试时间的编排，便变为求G的着色数$\gamma(G)$。

已给单纯图$G=(X,E)$，如何去确定着色数$\gamma(G)$，又$\gamma(G)$具有一些什么特性，这些是本段所要研究的问题。

一种比较有效的求一个图的色数的方法，是继续采用凝缩与联接的方法，将一个图连续变形，最后变成一个集团，若最后所得的最小的集团是k－集团，原图的$\gamma(G)$便是k。所谓联边与凝缩，即选原图的两个非邻点联边，再将这边凝缩成一点，保留两个端点上原先所有的联边，继续这样做，原图的阶便逐渐变小，且原图逐渐变成一个集团，现通过下例，说明这个方法。

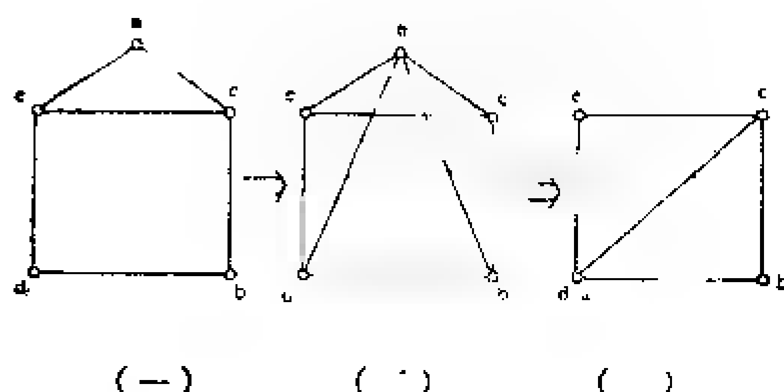


图 12 13

例 在图12.13中，已给图（一），先联非邻点ad与ab，得（二），自（二）将a与d合并成一点，保留这两点原先的所有联边，得（三），自（三）再将非邻点b，e联边，合并得（四），这个图是一个3－集团K_3，其着色数是3，故原图（一）的色数是3，图（四）可按上面相反的做法，逐步还原成（一），保留各顶的染色，便得原图的色数 3，在原图

(一)中，a，d二项非邻，故可同色，同样，b，e二点可同色，c染以第三种颜色，这个方法，叫做**凝缩与联接的原则**。

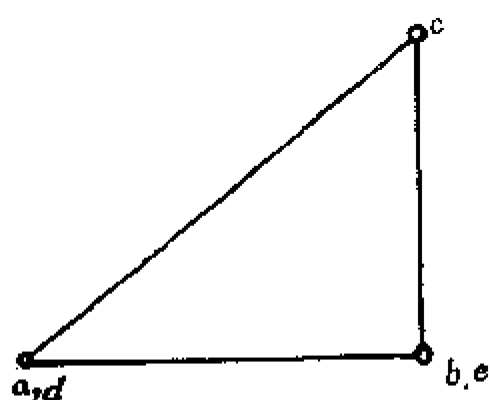
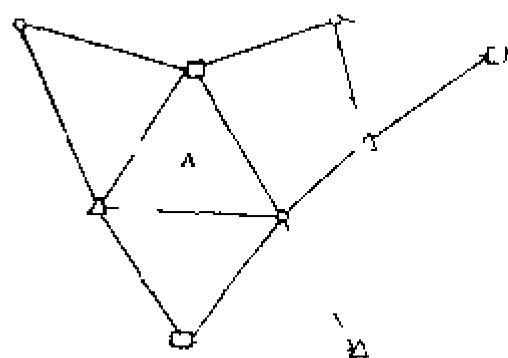
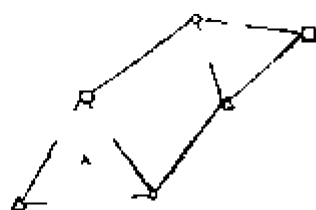


图 12 13 (四)

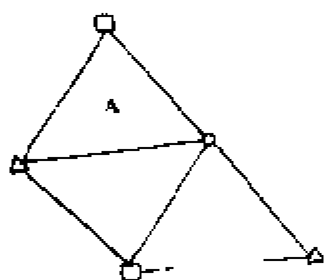
下面再来讲一种方法，叫做分片原则。假使已给的图G，其中包含断集A，则在图G中，除去断集A，便可得若干个联接的分子图，每个分子图，与断集联合，是一个联接的部份子图，称为原图的片，譬如下图12.14(一)，可分成三片，将每片着色，只须断集A的着色，在各片都相同，然后将各片合并，便得原图的一个着色，这种方法，叫做**分片原则**。



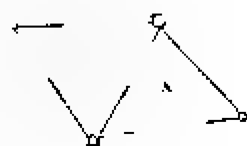
(一)



(二)



(三)



(四)

图 12 14

以下来研究色数$\gamma(G)$的某些性质。

定理12.9 设G是一个n阶的单纯图，β是其稳固数，γ是其

色数，则

$$\beta\cdot\gamma\geqslant n,$$
$$\beta+\gamma\leqslant n+1\text{。}$$

证 设将图G的顶染以γ种颜色α_1，α_2，…，α_γ，每种颜色α_i所染的顶成一稳固集S_i，但$|S_i|\leqslant\beta$对$i=1,2,\cdots,\gamma$均成立，故

$$n=\sum_{i=1}^{\gamma}|S_i|\leqslant\gamma\cdot\beta\text{。}$$

又若S是图G的极大稳固集，$|S|=\beta$，$X-S$中各顶各染以一种颜色，与S中各顶的颜色不同（S中各顶是染以同一种颜色的），于是

$$\gamma(G)\leqslant(n-\beta)+1,$$

或 $$\beta+\gamma\leqslant n+1\text{。}$$

（证毕）

定理12.10（Geddam, Nordhaus〔1960〕）设$\overline{G}$是图G的补图，则

$$\gamma(G)+\gamma(\overline{G})\leqslant n+1\text{。}$$

证 所谓图G的补图$\overline{G}$是$\overline{G}=(X,\mathscr{P}_2(X)-E)$，亦即作出以$X$诸顶为顶的完全图$K_n$，自$K_n$中除去$G$的边，便得$\overline{G}$。

首先，定理对于$n=1,2$能成立。

当 $n=1$，$\gamma(G)=1$，$\gamma(\overline{G})=1$，

故 $\gamma(G)+\gamma(\overline{G})=2\leqslant1+1$。

当 $n=2$，$\gamma(G)=2\Rightarrow\gamma(\overline{G})=1\Rightarrow\gamma(G)+\gamma(\overline{G})=3\leqslant2+1$。

或 $\gamma(G)=1\Rightarrow\gamma(\overline{G})=2\Rightarrow\gamma(G)+\gamma(\overline{G})=3\leqslant2+1$。

以下用归纳法证定理对于$n>2$均成立。

设x_0是图中任一顶，去掉x_0，得子图$G_{X-\{x_0\}}$（简记

为G_0），显见

（1）　　$\gamma(G)\leqslant\gamma(G_0)+1$，

（2）　　$\gamma(\overline{G})\leqslant\gamma(G_0)+1$。

若在（1）与（2）中等号均成立，则

$d_G(x_0)\geqslant\gamma(G_0)$，

$d_G(x_0)\geqslant\gamma(G_0)$。

于是

$\gamma(G_0)+\gamma(\overline{G_0})\leqslant d_G(x_0)+d_G(x)$

$=n-1$。

故　$\gamma(G)+\gamma(G)\leqslant n-1+2=n+1$。

若在（1）与（2）中，有一个等号不成立，则

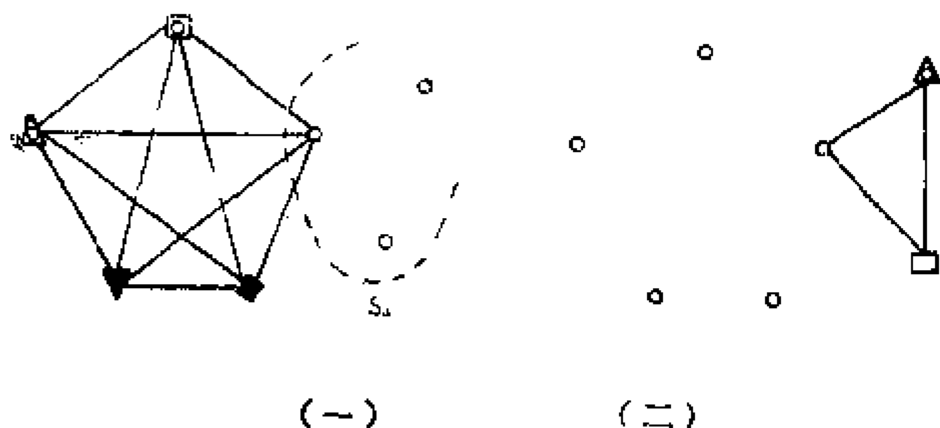
$\gamma(G)+\gamma(\overline{G})\leqslant\gamma(G_0)+\gamma(G_0)+1$。

据归纳假设　$\gamma(G_0)+\gamma(G_0)\leqslant n-1+1=n$，

故　$\gamma(G)+\gamma(G)\leqslant n+1$。

读者可注意，本定理的上限，是可能最好的，即可能有图G，使$\gamma(G)+\gamma(\overline{G})=n+1$。作一个类型的$n$阶的图$T_1(n,p)$使在其内，包含一个$p$顶的稳固集$S_p$，与一个含（$n-p+1$）个顶的集团，且$|K_{n-p+1}\cap S_p|=1$，当$p=1$，显见$G=K_n$，此时$\gamma(G)=n$，$\gamma(G)=1$，故$\gamma(G)+\gamma(G)=n+1$。

例　取$n=7$，$p=3$，作图如下：



（一）　　　　（二）

图　12.15

图12.15（一）含一个稳固集S_3和一个5－集团K_{n-p+1}

（二者有一个公共顶），其$\bar{G}$为图12.15的（二），显见

$$\gamma(G)=5,\ \gamma(\bar{G})=3,$$

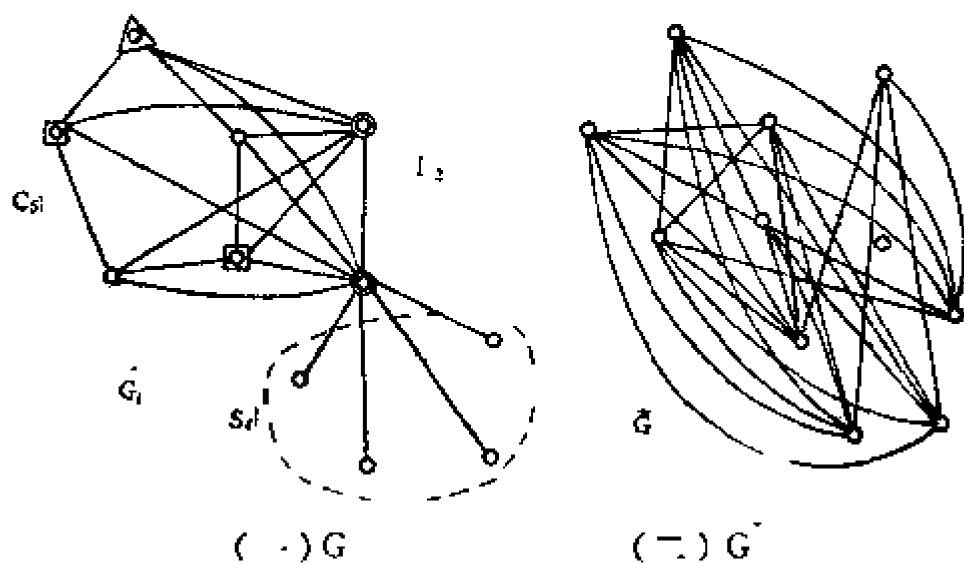
故　$$\gamma(G)+\gamma(\bar{G})=5+3=8=7+1。$$

于此，再作另一个类型的图$T_2(n,\ p)$，其构造为次：

（1）作一个圈C_5无弦，其长为5。

（2）作一个稳固集S_p，其$p\leqslant n-5$。

（3）作一个K_{n-p-5}，使C_5的每个顶，邻于K_{n-p+5}的每个顶，C_5的每个顶，都不邻于S_p的顶，而且使这三个点集彼此无公共点。



（一）G　　（二）$\bar{G}$

图 12.16

自图12.16，知

$$\gamma(G)=n-p-5+3=n-p-2,$$

$$\gamma(\bar{G})=p+3,$$

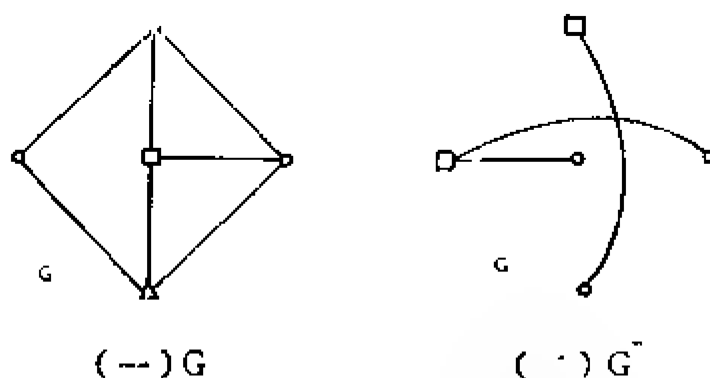
故　$$\gamma(G)+\gamma(\bar{G})=n-p-2+(p+3)=n+1。$$

定理12.10中所给的上界，在T_1型与T_2型的图，都能达到，H.J.Finck 于1966* 更进一步证明了只有这两个类型的图，其

---

* Finck, H. J., Über die chromatischen Zahlen eines Graphen und seines Komplements I 与 II. wiss. Z. T. H. Ilmenau 12 (1966) 243～251

色数之和能达到上界，如下图12.17



（一）G　　　　（二）$\bar{G}$

图 12.17

其　$\gamma(G)=3$，$\gamma(\bar{G})=2$.

故　$\gamma(G)+\gamma(\bar{G})=3+2=5<n+1$，

因在本例，$n=5$，$n+1=6$。

定理12.11　设单纯图$G=(X,E)$，具n个顶，m条边，则

$$\gamma(G)\geqslant n^2/(n^2-2m)。$$

证　设$\gamma(G)=q$，并设S_1，S_2，$\cdots$，S_q是分别染成颜色a_1，a_2，$\cdots$，a_q的点集，则图G的相邻矩阵便可写成下形：

$$\begin{array}{c|ccccc} & S_1 & S_2 & S_3 & \cdots\cdots & S_q \\ \hline S_1 & 0 & & & & \\ S_2 & & 0 & & & \\ S_3 & & & 0 & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ S_q & & & & & 0 \end{array}$$

命$|S_i|=n_i$，$N_{(1)}$表示矩阵里元素1的个数，$N_{(0)}$表示矩阵里元素0的个数，显见

$$N_{(1)}=2m,$$

$$N_{(0)}\geqslant n_1^2+n_2^2+\cdots+n_q^2\geqslant\frac{(n_1+n_2+\cdots+n_q)^2}{q}$$

$$=\frac{n^2}{q}。$$

但矩阵中元素的总数是

$$n^2 = N_{(0)} + N_{(1)} \geqslant 2m + n^2/q,$$

或 $$(n^2 - 2m)\cdot q \geqslant n^2,$$

故 $$q = \gamma(G) \geqslant n^2/(n^2 - 2m)。$$

（证毕）

读者可注意，欲定理中的不等式取等号，须

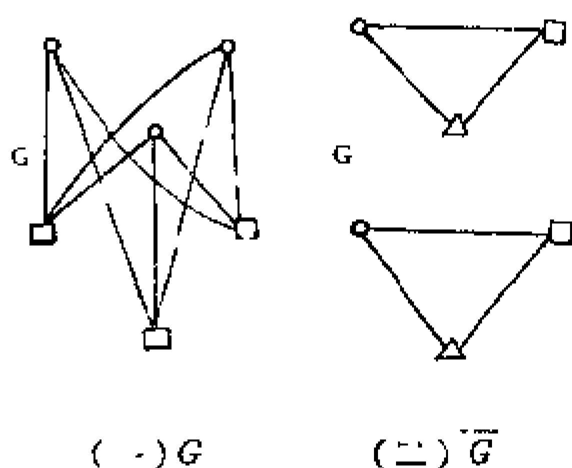
$$N_{(0)} = n^2/q。$$

第一，必须 $n_1^2 + n_2^2 + \cdots + n_q^2 = \dfrac{(n_1 + n_2 + \cdots + n_q)^2}{q}$，

即须 $(n_1, n_2, \cdots, n_q)$ 与 $(1, 1, \cdots, 1)$ 成比例，故必须

$$n_1 = n_2 = \cdots = n_q。$$

第二，在矩阵中，方块 $S_i \times S_i$ 以外各处的元素均应为1，综合此二者，乃知所给的图，必须是q个同维的稳固集所构成，且在不同的稳固集里的点均相邻，下面的图 12.18 便是这样一个图：



（一）G　　（二）$\overline{G}$

图 12.18

其中 $$\gamma(G) = 2 \geqslant \frac{6^2}{6^2 - 18} = \frac{36}{36 - 18} = 2,$$

$$\gamma(\overline{G}) = 3 \geqslant \frac{36}{36 - 12} = \frac{36}{24} = \frac{3}{2},$$

且 $$\gamma(\overline{G}) + \gamma(G) = 2 + 3 = 5 < n + 1。$$

§2 临界图

任给一个图G，设H是G的任一子图，恒有

$$\gamma(H)<\gamma(G),$$

则图G称为是临界的。若$\gamma(G)=k$，而G又是临界的，则G称k—临界图。K_4是4—临界的，下图12.19也是4—临界的，这个图叫做**格罗尔施图**。

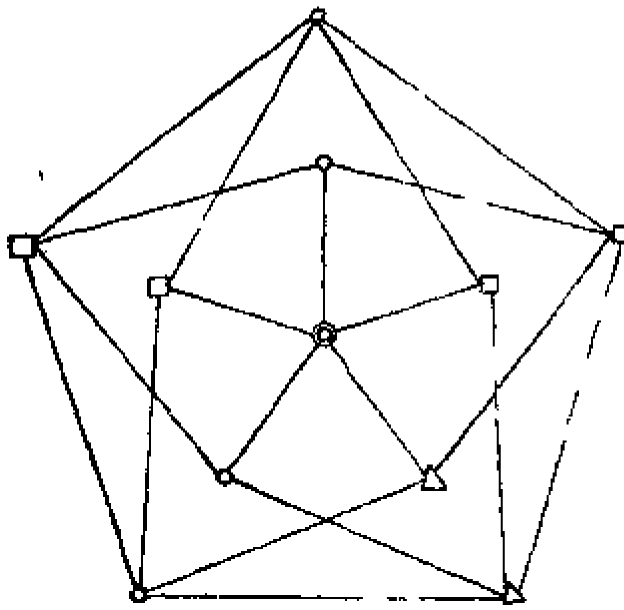


图 12.19

很明显，临界图必须是联接的，设图断成两个联接的部分子图G_1与G_2，设$\gamma(G_1)>\gamma(G_2)$，显见原图$G=G_1\cup G_2$，其$\gamma(G)=\gamma(G_1)$，在G_2中任意去掉若干点，得子图H，将仍有$\gamma(H)=\gamma(G_1)=\gamma(G)$。

定理12.12 设图G是k—临界的，则$\delta\geqslant k-1$，其中δ是图G顶点的最低次。

证 设$d_{G(v)}=\delta$，作图$H=G-v$，由于G的临界性，H将是$k-1$—着色的，即在H中，可将其顶点分划成$k-1$个稳固集$\{S_1, S_2, \cdots, S_{k-1}\}$，设这些稳固集是分别染以颜色$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{k-1}$的，若$\delta\geqslant k-1$不成立，则$\delta<k-1$，$v$将与少于$k-1$个顶相邻，故$v$至少将和$S_i$中某个稳固集$S_\pi$中的点都不相邻，将$v$染以$S_\pi$的颜色，于是图$G$便可$(k-1)$—着色，这是矛盾。（证毕）

定理12.13 每个可k—着色的图，至少有k个顶，其次数至少是$k-1$。

证 已给图G，可k－着色，可逐渐舍去G的顶，总可最后得—k—临界的子图H，由于H是可—k－着色的，故H至少应有k个顶，故原图G也至少有k个顶，在H里，据上定理有$\delta_H \geqslant k-1$，即在子图H里，每个顶点，其次数至少是$k-1$，故在原图G里，有k个顶点其次数也至少是$k-1$。

（证毕）

推理12.13：设图G的极大次是Δ，则

$$\gamma(G) \leqslant \Delta + 1。$$

证 设$\gamma(G)=k$，据上定理，有

$$\Delta \geqslant \delta \geqslant k-1，$$

或

$$k \leqslant \Delta + 1。$$

（证毕）

在本部分的§1里，讲分片着色时，曾假定图G有断集A，若图G是临界的，则情况有所不同。

定理12.14 在一个k临界图里，没有断集是一个集团。

证 设G是k—临界的，有断集是$G_A=K_\lambda$像先前一样，将G分片，由于G临界，每个片最多可－$(k-1)$－着色，但染G_A的顶须λ种颜色，在各个片中染色时A的点均可用同样的λ种颜色，因而整个图G，便可－$(k-1)$—着色，这是矛盾。

（证毕）

由这个定理，知临界图不能有断点，设有一个断点x_0，则x_0是一个K_1，这和定理12.14矛盾，若原图有二断点，这二点便不能相邻，否则此二相邻点均成一个K_2，成为原图的一个断集，原图便不可能是临界的，于此有下

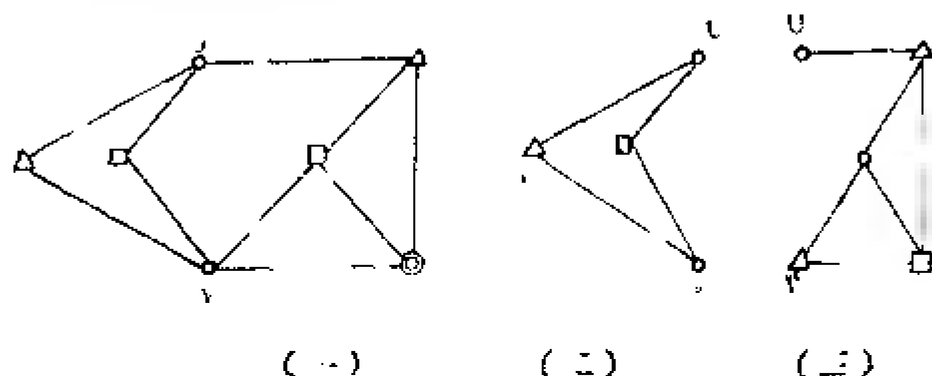
定理12.15 （Dirac〔1953〕①）设图G是k—临界的，有一个2顶的断集$\{U, V\}$，U与V不相邻，则

---

① G A Dirac. The structure of k—chromatic graphs Fund Math 40 (1953) 42—55

$$G=G_1\cup G_2,$$

其中G_1与G_2是G的二片，且G_1的每一种（$k-1$）-着色，均使U，V同色而G_2的每一种（$k-1$）-着色，均使U，V异色。



（一）　　（二）　　（三）

图 12-20

证　由于原图（一）是k-临界的，断点将原图截断，所分出的两片应均是可$(k-1)$-着色的，若两片的$(k-1)$-着色，使U与V有相同的着色方法，则将二片在U，V二点处合并，得原图，原图便可（$k-1$）-着色，这是矛盾。故将原图在U，V二点分成二片，将此二片（$k-1$）—着色时，在二片中U，V二顶，必不可能有相同的着色方法，故在一个片上二顶U，V总同色，而在另一片上，U，V二顶总异色。

（证毕）

设G是一个k—临界图，有一个2顶的断集$\{U, V\}$，则将图G自断集$\{U, V\}$截断成二片G_1，G_2，设对G_1作（$k-1$）—着色，U与V总同色，对G_2作（$k-1$）着色，U与V总异色，则G_1称为是第一型的，G_2称为是第二型的。因此，不可能有同一个（$k-1$）-着色，同时将G_1与G_2着色，否则G将是（$k-1$）-着色的。但$G_1\cup G_2$是G的一个子图，G是k-临界的，故$G=G_1\cup G_2$，命$H_1=G_1+(U,V)$，可以证明H_1将是k-临界的，在H_1里子去一边e，往证其所余图

是可一（$k-1$）着色的。设$e=[U,V]$，这是很显然的，设e是其他任一边，$G-e$是（$k-1$）-着色的，由于G_2是其一个部份子图，将这个着色，加之于G_2，由于G_2是第二型的，U，V二点必异色，将这个着色方法，限制在G_1上，将得$H_1-[U,V]$的一个着色方法，故$G_1+[U,V]$是k-临界的。同理可证$G_2\cdot[U,V]$也是k-临界的（其中$G_2\cdot[U,V]$表示自G_2将U，V合并成一点所得的图）。由以上所论，易得：

推理12.15。 设G是k-临界的，有一个两点的断集$\{U,V\}$，则

$$d(U)+d(V)\geqslant 3k-5。$$

证 设将G自$\{U,V\}$截断成二片G_1与G_2分别是第一型与第二型的，命$H_1=G_1+[U,V]$，$H_2=G_2\cdot[U,V]$，由于H_1与H_2都是k-临界的，故

$$d_{H_1}(u)+d_{H_1}(v)\geqslant 2k-2,$$

$$d_{H_2}(w)\geqslant k-1。$$

其中w是将U，v，凝缩成一点之后的点。

因G_1可自H_1去掉边$[Uv]$得来，故

$$d_{G_1}(u)+d_{G_1}(v)\geqslant 2k-4,$$

由上第二式，有

$$d_{G_2}(u)+d_{G_2}(v)\geqslant k-1,$$

将此二式合并，乃有

$$d_G(u)+d_G(v)\geqslant 3k-5。$$ （证毕）

在边着色里，我们曾经讲过Vizing定理，把图G的着色指数和图的最高次联系起来，在图论研究上，起了很重要的作用。关于点着色，同样有下面的重要定理：

定理12.16 （Brooks〔1941〕①）设G是一个单纯的联接

---

① R L,Brooks: On coloring The nodes of a network, proc cambridge philos Soc,37 (1941), 194--197

图，且若G既不是奇圈，也不是一个完全图，则

$$\gamma(G)\leqslant\Delta。$$

其中$\gamma(G)$是G的色数，Δ是G的顶点的最高次。

证 很明显，一个单纯联接图，假使是一个奇圈，则其最高次是2，其着色数是3，故$\gamma(G)=3\quad 2+1$。设图G是一个顶或2个顶的完全图，其着色数分别是1与2，故$\gamma(G)=\Delta+1$，一个n阶的完全图K_n，其上任二顶都相邻，其着色数$\gamma(G)=n$，但其最高次$\Delta=n-1$，故在K_n，有$\gamma(G)=\Delta+1$。

除以上几种情况外，任何一个图，设其最高次是Δ，则这个图总可Δ—着色，即总可用Δ种颜色涂染图的顶，使没有二邻点同色。

不妨假设图G是k—临界的。若$\gamma(G)=1$，图G只能是若干个孤立点的组合，若G又是临界的，G只能包含一顶，即$G\quad K_1$。若G是2—临界的，首先由于$\gamma(G)=2$，G是一个偶圈，或是若干条不相邻边的组合，由于偶圈不临界，故$G\quad K_2$。若$\gamma(G)=3$，则G是一个奇圈，或是K_3(K_3实际上也是一个奇圈)。因此，若G是k—临界的，可假定$k\geqslant4$，首先，设G联接，但有2—断集$\{u,v\}$，据上节推理，有

$$d_G(u)+d_G(v)\geqslant3k-5。$$

但$k\geqslant4\to3k-5\geqslant2k\quad1$，故若图$G$的顶的最高次是$\Delta$，则

$$2\Delta\geqslant d_G(u)+d_G(v)\geqslant2k\quad1,$$

此式左端是一偶数，右端是一奇数，故此式成立，必须

$$\Delta\geqslant k.$$

即 $$\gamma(G)=k\leqslant\Delta。$$

这式说明对于有2—断集$\{u,v\}$的联接图，Brooks定理是成立的。

设图G单纯联接，又无2一断集$\{u, v\}$，由于图是联接的，在G中任取二不相邻的点u，w，自u到w总有链相联。且在u与w之间，有点v，使uv，vw都是图的边，而uw不是图的边，因对任意三项u，v，w，当uv，vw是图的边，总可导致uw也是图的边，则图的每二项将有联边，而原图将是一个完全图，这也与假设矛盾。故在一个单纯联接图G里，无2一断集$\{u, v\}$，又不是完全图时，图G中必将有三项u, v, w，满足条件，uv，vw都是图的边，而uw不是图的边。设已给的这样的图G是k一临界的，其$k\geqslant 4$，则$n\geqslant 1$，故在G里可选出三点u，v，w，使满足上述要求，将图的n个项编排顺序，使u为v_1，w为v_2，v为v_n，其他各项按序编排，使v_i至少与其后一点v_j（$j>i$）相邻，现取Δ种颜色α_1，α_2，…，α_Δ，由于v_1与v_2不相邻，故可将此二项染以同一种颜色，然后顺次用所余的$\Delta-1$种颜色来涂染其他各项，当染到第i项v_i时，在该点之前，最多有$\Delta-1$个项与之相邻，故在Δ种颜色中至多已用去$\Delta-1$种，故总尚有一种颜色来染v_i，最后到$v_n=v$，与v相邻的，最多有$\Delta-2$个项，异于v_1，v_2，故在v之前，在Δ种颜色中最多有$\Delta-1$种颜色（因v_1与v_2是同色的）已用过，故至少将有一种颜色，可以用来涂染v（$=v_n$），故一个图G，单纯，3一联（没有2一断集$\{u, v\}$又不是K_n，其最高次为Δ，总可一Δ一着色，故

$$\gamma(G)=k\leqslant\Delta。$$

这就是Brooks定理，见图12.21。

（证毕）

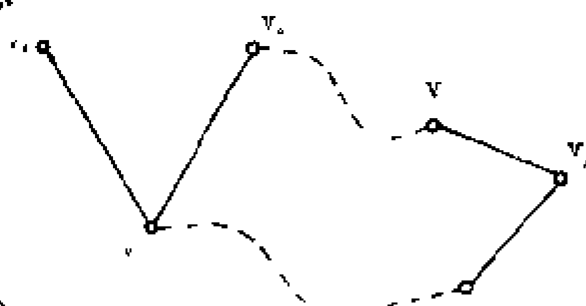


图 12.21

由于Brooks定理，已给任何图G，若G有2一断集$\{u,v\}$，可用分片原则来考虑图的着色数，若图是单纯3一联的，可检

查求出其最高次Δ，若G是单圈，则$\gamma(G)=3$，若G是Kn，$\gamma(G)$ n，否则图G的着色数$\gamma(G)\leqslant\Delta$。在两分图上，由于其着色数是2，而Δ可任意加大，在这种情况$\gamma(G)\leqslant\Delta$对于$\gamma(G)$的确定，帮助是不大的。

§3 着色多项式

已给图$G=(X,E)$，以上研究了G的着色数$\gamma(G)$，但另一个问题，也是值得研究的，设已知图G可k—着色，那么，有多少种方法，使其顶k—着色呢？这就是：已给n个顶$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$及$k$种颜色的集合$\{1, 2, \cdots, k\}$，要求作对应$f$：

$$f(x)=\lambda,\ x\in X,\ \lambda\in\{1, 2, \cdots, k\},$$

使 $\qquad [x,y]\in E,\quad \Rightarrow f(x)\neq f(y)$。

譬如一个三角形，共3个顶$\{x_1, x_2, x_3\}$，这个图是可3—着色的，设涂染的三种颜色是{红，绿，黑}，将x_1，x_2，x_3的每种排列，排在3种颜色之下，每一种排列是一种着色方法，于此共有$3!=3\cdot2\cdot1=6$种着色方法来使三角形的三个顶染成红、绿、黑三种颜色。又如有n个互不相邻的点，将其染以k种颜色，那么着色的方法便有k^n种。又一个n阶的完全图K_n，设有k种颜色，可将其顶着色，将图的顶编成顺序，则第一顶可染以k种颜色，即有k种染法，第二顶有$k-1$种染色方法，如此类推，将染色方法的个数记为$\pi_k(G)$，则

$$\pi_k(K_n)=k(k-1)\cdots(k-n+1)。$$

这是k的一个多项式，叫做图G的着色多项式，若G可k—着色，这个多项式，表示将图Gk—着色的方法的个数。于此，有下二引理：

引理12.1 n个孤立的点，构成图G，其着色多项式

$$\pi_k(G)=k^n。$$

证 每个点都有k种着色方法，故$\pi_k(G)=k^n$

引理12.2 完全图K_n的着色多项式是

$$\pi_k(K_n)=k(k-1)\cdots(k-n+1)。$$

证 显然。

任给一个可k—着色的图$G=(X,E)$，设$e\in E$是G的任一边，去掉这边，得一个图，记作$G-e$，再将e的两个端点，合并成一点，将图记作$G\cdot e$，用原来的k种颜色来涂染$G-e$的顶点（这当然是可能的），其着色方法，可分两大类，一类是边e的两端异色，一类是边e的两端同色，前图和原图G的k—着色方法是一样的，原图G既可k—着色，$G-e$与$G\cdot e$当然也可k—着色，于此有下

定理12.17 $\pi_k(G)=\pi_k(G-e)-\pi_k(G\cdot e)$。

证 根据以上的研究，图$G-e$的k—着色方法，第一类是和原图的k—着色方法一致的，故

$$\pi_k(G-e)=\pi_k(G)+\pi_k(G\cdot e)。$$

由此便可立即推得

$$\pi_k(G)=\pi_k(G-e)-\pi_k(G\cdot e)。$$

（证毕）

这个定理的应用，是将一个图$G=(X,E)$的着色多项式，化为求边数较少的图的着色多项式，反复应用，便可求得任一图G的着色多项式$\pi_k(G)$。

例1 设$G=$ 则

$\pi_k(G)=\pi_k\Big(\quad\Big)+\pi_k\Big(\quad\Big)$

$= \pi_k(\ ) + \pi_k(\ )$

$+ \pi_k(\ ) + \pi_k(\ )$

将图化成单纯图，便有

$\pi_k(G) = \pi_k(\ ) + 2\pi_k(\ ) + \pi_k(\ )$

$= k(k-1)(k-2)(k-3) + 2k(k-1)(k-2) + k(k-1)$

$= k(k-1)(k^2-3k+3)$

例二 $G =$

$\pi_k(G) = \pi_k(\ ) + \pi_k(\ ) + \pi_k(\ )$

$- \pi_k(\ ) - \pi_k(\ ) - \pi_k(\ )$

$= \pi_k(\ ) - \pi_k(\ ) - \pi_k(\ ) + \pi_k(\ )$

$- \pi_k(\ ) + \pi_k(\ ) + \pi_k(\ ) - \pi_k(\ )$

$= k^4 - 3k^3 + 3k^2 - k = k(k-1)^3$

从以上两个例子来看，一个是将 $\pi_k(G)$ 化成若干个完全

图的着色多项式的线性组合，一个是将$\pi_k(G)$化成若干个孤立点的图的着色多项式的线性组合，就例2而言，若改用例1的方法予以简化，最后结果是一样的。据引理12.1，引理12.2及定理12.17，乃有下

定理12.18 对任一n阶的图G，其$\pi_k(G)$是k的n次多项式，其首项是k^n，末项是0，系数是整数，正负相间。

证 设$G=(X,E)$，取关于$|E|$的归纳法来证本定理。

当$m=1$，G共含$n-2$个孤立点，再加一条边e，据定理12.17，有

$$\pi_k(G)=\pi_k(G-e)-\pi_k(G\cdot e),$$

$G-e$是n个孤立点所组成的图，其

$$\pi_k(G-e)=k^n,$$

$G-e$是$n-1$个孤立点所组成，同理有

$$\pi_k(G\cdot e)=k^{n-1},$$

于是 $\pi_k(G)=k^n-k^{n-1}$。

此证定理对$m=1$是正确的。设定理对于边数小于m的图都正确，则据定理12.17及引理12.1，引理12.2，有

$$\pi_k(G)=\pi_k(G-e)-\pi_k(G\cdot e).$$

$G-e$与$G\cdot e$均是图，其边数均较G少1，其顶数则前者和G同，后者较G少1，据归纳假设

$$\pi_k(G-e)=k^n+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{n-i}a_ik^i,$$

$$\pi_k(G\cdot e)=k^{n-1}+\sum_{i=1}^{n-2}(-1)^{n-1-i}b_ik^i,$$

其中a_i，b_i统为非负整数，代入，便有

$$\pi_k(G)=k^n+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{n-i}a_ik^i-k^{n-1}+\sum_{i=1}^{n-2}(-1)^{n-i}b_ik^i$$

$$= k^n + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-i} (a_i + b_i) k^i 。$$

这正是定理中所要求的那种形式。

（证毕）

当G的边比较少，使用$\pi_k(G) = \pi_k(G - e) - \pi_k(G \cdot e)$，减少边，可迅速将$\pi_k(G)$化成无边图的着色数的线性组合，像例2那样。当$G$的边比较多，使用$\pi_k(G - e) - \pi_k(G) + \pi_k(G \cdot e)$将$\pi_k(G)$化成完全图的着色数的线性组合，如例一那样。在一个图若同时使用两种途径，则所得结果是一样的，在简化过程中，若两点之间，出现重边，可将其单纯化，即只保留一边，去掉重边。

§4 平面图的可——5着色

在图论里，有一个比较有名的猜想：所谓四色猜想，即，一个平面图可4—着色，也就是一张地图，不同的区域，各涂以一种颜色，用四种颜色涂染这张地图，可使相邻的区域，各不同色。由于地图是平面的，所以地理学上的这个问题，和一般图的是否可—4着色是一样的。不久前已利用电子计算机，经过较长时间的计算，予以验证，但在理论上，还一直没有解决。可是一个平面图是可5—着色的，此即下

定理12.19 平面图可5—着色。

证 由于平面图可4—着色，这个定理自然能成立，这个定理还可直接验证如次。

首先，据推理4.1$_d$，任一单纯平面图，$G=(X, E)$，总有点x_0，其次数不超过5，即总有顶x_0，其$d_G(x_0) \leqslant 5$。

设定理对图的阶$<n$的图均成立，往证定理对于$|X|=n$的图也成立，设在图G里有x_0，其$d_G(x_0) \leqslant 5$，去掉该顶得子图G_{X-x_0}（简记作G_0），很明显，G_0的阶是$n-1$，据归纳假

设G_0是可—5—着色的，设在G里与x_0相邻的没有5点，即若$d_G(x_0)<5$，则很明显，可用五种颜色中某一颜色来涂染x_0，使x_0和它的邻点各不同色，于是G便可—5—着色，设在G里与x_0相邻的五点是x_1，x_2，x ，x_4，x_5，在G_0里所用的五种颜色，设为α_1，α_2，α_3，α_4，α_5，x_i已分别染以颜色α_i，

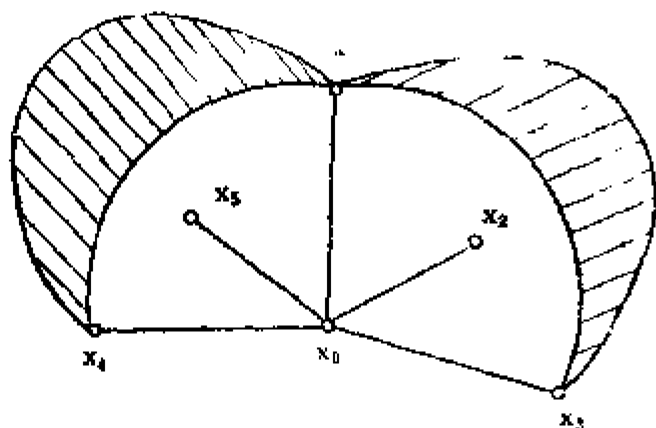


图 12 22

在G_0取部份子图G_{13}，包含所有染以α_1与α_3的顶，若G_{13}的联接分子图中，不同时包含x_1与x_3，则x_1可改染颜色α_3，于是便可用颜色α_1来涂染x_0，使G5—着色。同理，作部份子图G_{14}包含所有染以α_1与α_4的顶，同样，若G_{14}的联接分子图中，不同时包含x_1与x_4，则x_1可改染颜色α_4，于是x_0便可染以颜色α_1，图G也就可5—着色了。设在G_{13}与G_{14}里均分别有链，自x_1联到x_3与x_4，则x_2与x_5便被分隔在两个不同的区域里，不可能有链，自x_2联到x_5，使在其上的顶是染以α_2与α_5的。于是可将x_2改染α_5，而x_0便可染以颜色α_2。总之，涂染G_0的五种颜色，总可挪出一种来涂染顶x_0，使原图G可—5—着色。当$n<5$，图G显是可5—着色的，即定理对于$n<5$均成立，于是定理得证。

（证毕）

推理12.19a 设平面图G是n阶的，其极大稳固数是α，则$\alpha(G)\geqslant n/5$。

证 由于平面图可—5—着色，即可将图的顶分成5个稳固集$\{S_1, S_2, \cdots, S_4, S_5\}$，各染以一种颜色，于是

$$n-\sum_{i=1}^{5}|S_i|\leqslant 5\cdot\alpha,$$

或 $\alpha\geqslant n/5$。

（证毕）

习　题

1．求出一个边染色的方法证明 对于完全二分图 $K_{m,n}$ 有 $q(K_{m,n})=\max\{m,n\}$。

2．试证明：Peterson图是可4—边—着色的。

3．设G是联结的单纯图且不是奇圈，则存在2—边染色法，使得G的每一个次数≥ 2的点均与染了两种色的边相关联。

4．设已给G的一个k—边—着色$\mathscr{C}$，以$C(x)$表示点x所关联的边被染成的不同的色的数目，如果有另一种k—边—着色$\mathscr{C}'$使得 $\sum\limits_{x\in X}c'(x)>\sum\limits_{x\in X}c(x)$，则称$\mathscr{C}'$为$\mathscr{C}$的改进。如果染色法$\mathscr{C}$不能被改进，则称$\mathscr{C}$为最优$k$—边—着色法。试证明 如果$\mathscr{C}$是$G$的最优$k$—边—着色法，又$G$中有点$x$以及两种色$\alpha$、$\beta$，使得色$\alpha$在点$x$所关联的边中不出现，而$\beta$在$x$所关联的边中至少出现两次，则$G(\alpha、\beta)$含点$x$的联结分子图是一个奇圈。此处$G(\alpha,\beta)$为由所有被染以色$\alpha$、$\beta$的边所生成的部分图。

5．试证明：如G是两分图、最小次数$\delta>0$，则G有一个δ—边—染色法$\mathscr{C}$，使在每一点x有$C(x)=\delta$成立。

6．设图G的着色指数为$q(G)=k$，又G的任一个k—边—染色法在其边集合E上均诱导出同样的划分，则称G为唯一可k—边—染色的。试证明：每一个唯一可3—边—染色的3次正规图都是哈密顿图。

7．单纯图G和H的积是单纯图$G\times H$，其顶点集为$X(G)\times X(H)$，又当且仅当$x=x'$，$[y,y']\in E(H)$或者$[x,x']\in E(G)$，$y=y'$时点(x,y)与(x',y')相邻，此处$x,x'\in X(G)$，$y,y'\in X(H)$，试证明：(1) $q(G\times K_2)=\varDelta(G\times K_2)$，其中$\varDelta$表示极大次数，(2)如果$H$是$q(H)=\varDelta(H)$的非平凡图，则$q(G\times H)=\varDelta(G\times H)$。

8．试证明：如G是其最小次数$\delta>1$的单纯图，则G有$(\delta-1)$—边—染色

法使得在每点x均有$c(x)=\delta-1$成立，此处$c(x)$的意义同第4题。

9 设M和N是G中$|M|>|N|$的不交的并列集，则G中有不交的并列集M'和N'使$|M'|=|M|-1$，$|N'|=|N|+1$，且$M'\cup N'=M\cup N$

10 设$G=(X,Y,E)$是两分图，顶点的最大次数是Δ，$p\geq\Delta$是整数，则G中存在p个不交的并列集M_1，M_2，…，M_p，使得$E=M_1\cup M_2\cup\cdots\cup M_p$，且对$1\leq i\leq p$均有

$$[|E|/p]\leq|M_i|\leq[|E|/p]^*,$$

试证明之。

11 考查完全图K_n，此处n是偶数，将其顶点标为0，1，2，…，$n-1$，考查函数：

$$f(a,b)=\begin{cases}a+b & \bmod(n-1) \quad \text{如果}a,\ b\neq n-1,\\ 2a & \bmod(n-1) \quad \text{如果}a\neq n-1,\ b=n-1\\ 2b & \bmod(n-1) \quad \text{如果}a=n-1,\ b\neq n-1\end{cases}$$

试证明，f定义一个$(n-1)$—边—着色。

12 设G是单纯联结图，点x为其断点，除去点x得二个联结分子图C_1与C_2，又以G_i表示$C_i\cup x$生成的子图，$i=1,2$，试证明：$q(G)=\max\{q(G_1),q(G_2),d_G(x)\}$。

13．设$m_1\geq m_2\geq\cdots\geq m_q$是整数的不增$q$—重组，简记为$(m)$，在这类$q$重组$(m)$之间定义一个关系：$(m')<(m)$为，$\sum_{i=1}^{k}m_i'\leq\sum_{i=1}^{k}m_i$，$k=1,2,\cdots,q-1$，$\sum_{i=1}^{q}m_i'=\sum_{i=1}^{q}m_i$。如果$m_i\geq m_j+2$，则由关系式$m_i'=m_i-1$，$m_j'=m_j+1$，$m_k'=m_k$（$k\neq i,j$）所定义的$q$—重组$(m')$称为$(m)$由$(i,j)$所进行的转移。试证明$q$—重组$(m)$的一个转移定义一个$q$—重组$(m')<(m)$，而且每一个$q$—重组$(m'')$只要$(m'')<(m)$便可由$(m)$经有限次的转移而得到。

14．设$m_1\geq m_2\geq\cdots\geq m_q$为一非增整数列，$G$为一多重图其边数$m=\sum_{i=1}^{q}m_i$，其边分别染以色$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_q$，且对一切$i$具色$\alpha_i$的边数恰为$m_i$。试证明如果$(m')$是一个序列满足$(m')<(m)$，则$G$存在一个$q$—边—染色法使得对一切$i=1,2,\cdots,q$染了色$\alpha_i$的边恰为$m_i'$条。

15 设G是一个单纯图，最大次为h，$q(G)=h+1$，且对其每一条边e均有$q(G-e)=h$成立，试证明如一个点x与次数为h的点y相邻，则点x至少与

$h-k+1$个次数为h的点相邻。

16、试证明：如$\overline{G}$是n阶单纯图G的补图，则$\gamma(G)\ \gamma(\overline{G})\leq[(\binom{n+1}{2})^2]$，而且这是最好可能的结果。

17 设$(S_1, S_2, \cdots, S_q)$为单纯图G的一个q—着色（不一定是极小的），又令$d_k=\max\limits_{x\in S_k} d_G(x)$，则$\gamma(G)\leq\max\limits_{k\leq q}\min\{k, d_k+1\}$，试证明之。

18、试证明：如n个阶图G有满足$d_1\geq d_2\geq\cdots\geq d_n$的次序列$(d_1, d_2, \cdots, d_n)$则$\gamma(G)\leq\max\min\{d_i+1, i\}$

19 利用上题结论证明：(1)$\gamma(G)\leq[(2|E|)^{\frac{1}{2}}]$，(2)$\gamma(G)+\gamma(\overline{G})\leq n+1$，$\overline{G}$表示$G$的补图，下同。

20 如G是单纯图，试证明：如果对某个整数q，次数$\geq q$的顶点个数$\leq q$，则G是可q—着色的。由此推出：如单纯图G的最大次数为h，则G是可$(h+1)$—着色的。

21 试证明：如单纯图G的任二个奇圈均有一个公共顶点，则$\gamma(G)\leq 5$。

22、试证明：$\gamma(G)\leq 1+\max\delta(H)$，其中$\delta(H)$表示$G$的子图$H$中的最小次数，而max是对$G$的所有子图来取的。

23 如果k—色图G有一种染色法使得每种颜色都至少分配给两个顶点，试证明，G有一种这一类型的k—着色法。

24 如果图G的任二种k—着色法均导致点集X的相同划分，则称G为唯一可k—着色的。试证明k—临界图的任一个点断集都不能导出一个唯一可$(k-1)$—着色的子图。

25 试证明：如果x，y是临界图G的两个顶点，则$\Gamma(x)\nsubseteq\Gamma(y)$，并由此导出：不存在恰是$(k+1)$个点的$k$—临界图。

26 图G_1与G_2的联结$G_1\vee G_2$定义为这样的图，它由图G_1、G_2，以及使G_1中所有的点与G_2中所有的点均彼此有一条边相连而构成。试证明：

(1)$\gamma(G_1\vee G_2)=\gamma(G_1)+\gamma(G_2)$，

(2)$G_1\vee G_2$临界的充要条件是G_1与G_2均为临界图。

27 设G_1与G_2为恰好有一个公共顶点x的两个k—临界图，(x, y_1)和(x, y_2)分别是G_1和G_2的边，试证明：图$(G_1-(x, y_1))\cup(G_2-(x, y_2))+(y_1, y_2)$也是$k$—临界图。

28 对$n=4$和所有$n\geq 6$，在n个顶点上造一个4—临界图。

29 设单纯图$G=(X,E)$的点集有一个划分$\{X_1,X_2\}$，使得子图$G(X_1)$、$G(X_2)$都是可k—着色的，如果边断集(x_1, x_2)至多含有$(k-1)$条边，试证明G也是可k—着色的。並由此导出所有k色临界图都是$(k-1)$边联的。

30．试证明Brooks定理等价于下列命题：设单纯图G有n个点，m条边，是k—临界$(k\geq 4)$的，且不是完全图，则$2m\geq n(k-1)+1$。

31 试证明：如果G是临界图，$\gamma(G)=k$，且$A=\{x、y\}$是一个G的点断集，则关于A恰有2个片B_1与B_2且满足条件：$\gamma(B_1)=\gamma(B_2)=k-1$。

32．试证明：如果G是临界图，$\gamma(G)=k\geq 4$，$A=\{x, y, z\}$是一个点断集，则下列情形之一必然发生

(1) G_A仅含一条边，且关于A至多有3个片，每片的色数均为$k-1$。

(2) G_A恰含二条边，且关于A至多有2个片，每片的色数均为$k-1$。

(3) G_A不含边，且关于A至多有5个片，每片的色数为$k-1$或$k-2$。

33 试证明：如G是临界图，$\gamma(G)=k$，则对所有的点x均有$d_G(x)\geq k-1$，而且由点集$M=\{x \mid x\in X, d_G(x)=k-1\}$所生成的子图$G_M$的每一块，或者是一个集团，或者是一个无弦的奇圈。

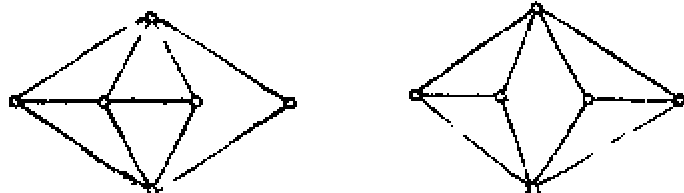
34．设G是临界图，$\gamma(G)=k\geq 4$，如G含有一个集团$C=\{x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}\}$含$(k-1)$个顶点，且$\sum_{i=1}^{k-1}(d_G(x_i)-k+1)\leq k-4$，则在$X-C$的$(k-1)$—着色中，集合$A_i=\Gamma_G(x_i)-C$含有公共色。

35、使用Brooks定理证明：对正规图G如果$\gamma(G)+\gamma(\overline{G})=n+1$，则$G$或者是$n$个孤立点，或者是一个$n$点集团，或者是一个长为5的初级圈。

36．设G为单纯图，$\gamma(G)=k$，且不含任何k—集团，记$S=\{x \mid d_G(x)>k-1\}$，则$\sum_{x\in S}(d_G(x)-k+1)\geq k-3$

37．设单纯图G是临界图具n点m边，$\gamma(G)=k$，且不含k—集团，则$2m\geq(n+1)(k-1)-2$。

38．求出下列二图的色多项式：

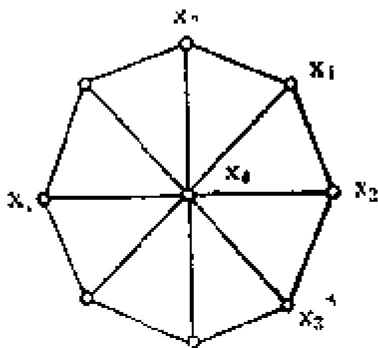


39 试证明：如G是n点m边的单纯图，则$\pi_k(G)$中k^{n-1}的系数为$-m$。进一步证明：没有一个图的色多项式是$k^4-3k^3+3k^2$。

40 试证明，如n阶图G是联结的，则$\pi_k(G)\leq k(k-1)^{n-1}$，且仅在$G$是树时，等号成立。

41 试证明，如n阶图G是长为n的圈，则$\pi_k(G)=(k-1)^n+(-1)^n(k-1)$。

42 试证明：如图G是n条幅的轮（如下图示），则$\pi_k(G)=k(k-2)^n+(-1)^n k(k-2)$



43 试证明：如图G是联结的，具n点m边，则$\pi_k(G)$中k^r的系数的绝对值$\geq\binom{n-1}{r-1}+(m-n+1)\binom{n-2}{r-1}$

44．试证明：在$\pi_k(G)$中，k的系数不为0的最低次项的次数等于G的联结分子图的个数。

45．试证明：如$G\cap H$是一个完全图，则

$$\pi_k(G\cup H)\cdot\pi_k(G\cap H)=\pi_k(G)\cdot\pi_k(H)$$

46 试证明：$\pi_k(G)$没有大于n的实根，n是G的阶。

47．n点图G称为是属于类型$T_3(n,\ p,\ q)$的，此处$n\leq pq$，如果存在其顶点集的两个划分$\{C_1,\ C_2,\ \cdots,\ C_q\}$及$\{D_1,\ D_2,\ \cdots,\ D_p\}$，使有：(1) $\max|D_i|=q$，(2) $\max|C_i|=p$，(3) 对一切i，j，$|C_i\cap D_j|\leq 1$，(4) 同一个C_i中任二点均相邻，(5) 同一个D_j中任二点均不相邻。试证明：如G是类型$T_3(n,\ p,\ q)$的，则$\overline{G}$是类型$T_3(n,\ q,\ p)$的 且$\gamma(G)=p$导致$\gamma(\overline{G})=q$。又试证明，对任二整数p，q，只要$p\cdot q\geq n$，$p+q\leq n+1$，就存在一个图G属于类型$T_3(n,\ p,\ q)$，且$\gamma(G)=p$，$\gamma(\overline{G})=q$。

48．试证明：在可4—着色的单纯图G中，其边可用红、蓝二色进行染色，使得其中任一个三角形均含2条蓝色的边及一条红色的边。

49 试证明：在n阶单纯图G且$\gamma(G)=h$的图集中，具极大边数的图是唯一的。

第十三章　拉姆绥定理与拉姆绥数

§1　拉姆绥定理

已给n—集S（$|S|=n$），及正整数t，q_1，q_2，…，q_t，r，满足条件

$$q_1, q_2, \cdots, q_t \geqslant r \geqslant 1 \qquad (1)$$

在S中作所有r个元素的子集合得集合$P_r(S)$，将$P_r(S)$作t个子集的划分：

$$P_r(S)=A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_t \qquad (2)$$

设在原集合S中存在q_i—子集S_i（$|S_i|=q_i$），使S_i中所有r个元素的子集合，全含在A_i内，则称S包含子集合（q_i，A_i）或称**存在子集合**（q_i，A_i）。

设存在最小正整数$N(q_1, q_2, \cdots, q_t; r)$，使当

$$n \geqslant N(q_1, q_2, \cdots, q_t; r)$$

时至少存在一个子集合（q_i，A_i），则称此最小的正整数$N(q_1, q_2, \cdots, q_t; r)$为**拉姆绥数**（Ramsey number）。①

于此有下

定理13.1　拉姆绥定理　已给n—集S及正整数q_1，q_2，…，q_t，r，满足条件（1），则恒存在一个极小正整数$N(q_1, q_2, \cdots, q_t; r)$，使当$n \geqslant N(q_1, q_2, \cdots, q_t; r)$时将$P_r(S)$作分划（2），则在集合$S$里，将存在子集（$q_i$，$A_i$），其中$i$是1，2，…，$t$中某个数。

为了充分理解这个定理及下述的证法，先举一些特例：

①E P. Ramsey是英国的一个逻辑学家，这个定理，是由所谓鸽子进洞的问题，提升而来的，所谓鸽子进洞问题，乃是　若有充分多的元素，将其分成不太多的子集合，则至少将有一个子集合，含很多这样的元素。

例 1　$r=1$，此时 $P_r(S)=S$，而子集 (q_i, A_i) 就是 S 的一个子集，是 A_i 的一个 q —子集，这个问题，这时又回到了原来的鸽子进洞问题。此时，可取

$N(q_1, q_2, \cdots, q_t; r) = (q_1-1)+(q_2-1)+\cdots$
$+(q_t-1)+1 = q_1+q_2+\cdots+q_t-t+1$　　(3)

由于 $P_r(S)=S$，而当 $|S|\geq q_1+q_2+\cdots+q_t-t+1$ 时，将 S 划分成 t 个子集合 A_i，其中至少将有一个包含 q_i 个元素即恒有 (q_i, A_i) 存在。

例 2　$t=1$，此时只有一个 q，$q\geqslant r\geqslant 1$，显见

$N(q,r)=q$。　　(4)

例 3　$t=2$，且 q_1，q_2 中至少有一个等于 r，譬如 $q_2=r$，此时有

$$N(q_1, r; r)=q_1,$$
$$N(r, q_2; r)=q_2,$$

作分划　$P_r(S)=A_1\cup A_2$。

若 $A_2\neq\phi$，则 (r, A_2) 恒存在，若 $A_2=\phi$，则 (q_1, A_1) 是存在的。

拉姆绥定理的证　拉姆绥定理的证明，分两个归纳步骤。

（一）首先对于 t 进行归纳。若定理对于 $t=2$ 能成立，往证定理对于 $t=3$ 也成立，于是证定理对于一切正整数 t 均成立。在 $t=2$ 定理成立的前题下往证 $N(q_1, q_2, q_3; r)$ 是存在的，作分划

$$P_r(S)=A_1\cup A_2\cup A_3,$$

所谓证明定理成立，即往证恒存在子集 (q_i, A_i)，其中 i 等于 1，2，3 中某一个，将 $P_r(S)$ 的分划写成

$$P_r(S)=A_1\cup(A_2\cup A_3),$$

取　$A_2'=A_2\cup A_3$，

由于归纳假设，定理对于 $t=2$ 是成立的，故

$N(q_2, q_3, r)=q_2'$

是存在的。

同样，$N(q_1, q_2', r)$是存在的，此时n－集S包含子集(q_1, A_1)或包含(q_2', A_2')，若前者成立，定理已证，若后者成立，即存在S的子集(q_2', A_2')，亦即存在S的子集$(q_2', A_2 \cup A_3)$。据q_2'的定义，在S的q_2'子集中，将存在子集(q_2, A_2)或(q_3, A_3)。综合以上情况，便知，有S的子集(q_1, A_1)或(q_2, A_2)或(q_3, A_3)存在，此即定理的要求。

若定理对于$t=2,3$能成立，同样可证定理对于$t=4$也成立。

取 $N(q_2, q_3, q_4; r)=q_2'$，

据归纳假设 $N(q_1, q_2'; r)$是存在的，当将$P_r(S)$

划分成 $P_r(S)=A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$

$$=A_1 \cup A_2'$$

时，在集合S中存在子集合(q_1, A_1)或(q_2', A_2')，其中

$$q_2'=N(q_2, q_3, q_4; r), \quad A_2'=A_2 \cup A_3 \cup A_4,$$

若前者成立，定理已证，若后者成立，据归纳假设，将存在子集(q_2, A_2)或(q_3, A_3)或(q_4, A_4)，于是当$t=4$时，定理成立。推到一般，在一般情况下，定理是成立的，于是问题便集中到只须证明，当$t=2$时定理能成立即足。

（二）往证$t=2$时，定理成立，这里的证明方法，还是采用归纳证法。假设定理对于$N(q_1-1, q_2; r)$，$N(q_1, q_2-1; r)$及$N(q_1, q_2; r-1)$均成立，往证定理对于$N(q_1, q_2; r)$也成立，即如上所言，恒存在最小正整数

$$N(q_1, q_2; r),$$

使当 $n \geqslant N(q_1, q_2; r)$

时，n—集S的r－子集所成集合$P_r(S)$的任一分划

$$P_r(S)=A_1 \cup A_2$$

恒在n—集S里，存在子集(q_1, A_1)或(q_2, A_2)。

命

$$p_1 = N(q_1-1,\ q_2;\ r),$$

$$p_2 = N(q_1,\ q_2-1;\ r),$$

据归纳假设$N(p_1,\ p_2;\ r-1)$是存在的，取

$$n \geqslant N(p_1,\ p_2;\ r-1)+1, \qquad (5)$$

任作n—集S，再作分划

$$p_r(S)=A_1\cup A_2,$$

要证的是在n—集S里存在子集(q_1, A_1)或子集(q_2, A_2)。

在S中任意取定一个元素a，命$T=S-\{a\}$，由于

$$n-1\geqslant N(p_1,\ p_2;\ r-1),$$

在T中任作$(r-1)$—子集R，若$R\cup\{a\}\in A_1$，命$R\in B_1$，若$R\cup\{a\}\in A_2$，命$R\in B_2$，这样便得分划

$$p_{r-1}(T)=B_1\cup B_2,$$

由于 $n-1\geqslant N(p_1,\ p_2;\ r-1)$，

故据归纳假设，在T里必存在子集(p_1, B_1)或(p_2, B_2)，设前者成立，则因

$$p_1=N(q_1-1,\ q_2,\ r),$$

将子集$(p_1,\ B_1)$记作U，$U\subset T\subset S$，故U是S的一个子集，当将$P_r(S)$作分划

$$P_r(S)=A_1\cup A_2$$

时，U的$P_r(U)$也将分别属于A_1或A_2，故据U的确定，可知在U中存在子集$(q_1-1,\ A_1)$或$(q_2,\ A_2)$，即在S中存在(q_1-1)—子集，其所有r—子集，均含在A_1内，或存在q_2—子集，其所有r—子集均含在A_2内，若后者成立，定理便已证，若前者成立，命$V\subset U$是那个$(q_1-1,\ A_1)$子集，在S里，作子集$W=V\cup\{a\}$，此时，W是S的一个q_1—子集，在W中任取r—子集，若此子集不含a，则此子集是V的子集，据V的定义，这个子集，含在A_1内，若此子集含a，则此子集是V的一个$(r-1)$—子集，再加上元素a，原设$V\subset$

U，而U的所有$(r-1)$—子集，均含在B_1内，据B_1的定义，这个子集，加上元素a所得r-子集，应属于A_1，以上证明了W是一个(q_1, A_1)子集，于是定理得证。同样，若T包含子集(p_2, B_2)，可证S包含子集(q_2, A_2)。故定理得证。

欲确证$N(q_1, q_2; r)$的存在，即说明本部份归纳证法的实在性，尚须观察以下事实：

(1) 当$r=2$（在以下，$r=2$，均略去不写）。已知

$N(2,2)$，$N(2,3)$，$N(2,4)$，…，$N(2,q_2)$均存在

$N(3,2)$，$N(3,3)$，$N(3,4)$，…，$N(3,q_2)$均存在

$N(4,2)$，$N(4,3)$，$N(4,4)$，…，$N(4,q_2)$均存在

………

因$N(2,3)=3$，$N(3,2)=3$，$N(3,3,1)=5$，均存在，据上归纳证明$N(3,3,2)$是存在的，由于$N(2,4)$，$N(3,3)$及$N(3,4,1)$的存在，按上归纳证明，知$N(3,4,2)$是存在的。依此类推，可知$N(q_1, q_2, 2)$对一切q_1，$q_2 \geqslant 2 > 1$是存在的。

(2) 当$r=3$。

$N(3,3;3)$，$N(3,4;3)$，…，$N(3,q_2;3)$均存在

$N(4,3;3)$，$N(4,4;3)$，…，$N(4,q_2;3)$均存在

………

同样，据上归纳证法，一切$N(q_1, q_2; r)$在条件q_1，$q_2 \geqslant r$下均存在。

根据证明的第(一)部份与第(二)部份，可知

$$N(q_1, q_2, \cdots, q_t; r)$$

在条件(1)之下均存在，于是拉姆绥定理得证。

（证毕）

这个定理所确定那极小的正整数 $N(q_1, q_2, \cdots, q_t; r)$ 称为**拉姆绥数**。

这个定理的证明过程，看起来似乎也是一个计算过程，实际不是如此的。因为在证法(二)中，取

$$n \geqslant N(p_1, p_2, r-1)+1。$$

这个取法，未能确定r的极小性。

譬如，欲求$N(3,6,2)$，因$N(2,6,2)=6$，$N(3,5,2)=14$，$N(6,14,1)=5+13+1=19$，$N(6,14,1)+1=20$。真正的$N(3,6,2)=18$，但照证明(二)的过程，求得结果是$n \geqslant 20$，这就是因为不等式(5)未能确定极小性。在组合数学里求拉姆绥数是一个很难的问题，自R.E.Greenwood与A.M.Gleason于1955年做得一些结果之后，至今已近30年，这方面的进展，并不很大，事实上，计算$N(q_1, q_2, \cdots, q_t; r)$既无计算公式可循，又无循环公式可供演算，主要的算法，是用一种方法，来确定$N(q_1, q_2, \cdots, q_t; r)$所在的范围，若能确定

$$N(q_1, q_2, \cdots, q_t, r) \geqslant K,$$

又能用别的方法确定

$$N(q_1, q_2, \cdots, q_t; r) \leqslant K,$$

由此二条件，便确定

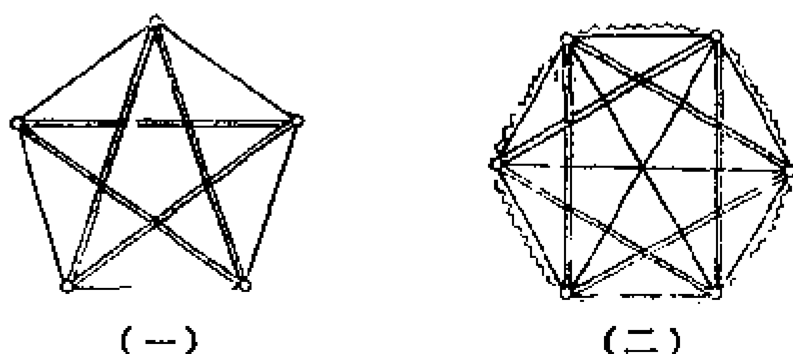
$$N(q_1, q_2, \cdots, q_t; r)=K。$$

用这种方法，来求极多个拉姆绥数$N(q_1, q_2, \cdots, q_t; r)$，无怪乎其进展之慢了。

§2 拉姆绥定理的应用

为了使读者对拉姆绥定理比较熟习，更具兴趣，本节举几个例，应用拉姆绥定理，求得一些有趣的结果。

例 1 设在空间有n个点，每二点定一线段，将这些线段，染以红色或绿色，于是n个点的所有 2 —子集，将分成两类。一类，其所联线是染红的，一类其所联线段是染绿的，设q_1，$q_2 \geqslant 2$是二正整数，且设$n \geqslant N(q_1, q_2; 2)$，则依拉姆绥定理，将存在$q_1$个点，其中每二点所联线段全是红的，或存在$q_2$个点，其中，每二点的联线都是绿的，而拉姆绥数$N(q_1, q_2; 2)$是满足这种性质的最小整数。譬如下五点形成的图$K_5$，可以将其边染红染绿，使其中不出现红三角或绿三角。



（一）　　（二）

图 13 1

但在（二）K_6中，将边染红或染绿，最后总将出现红三角，或绿三角。

例 2 任给正整数$m \geqslant 3$，必存在一个正整数N_m，具下性质（定理）：当$n \geqslant N_m$时，在平面上任给 n 个点，无三点共线，则在此n个点中，必存在m点构成一个凸m边形。

证 首先证下二引理：

引理13.1 在平面上任给 5 点，无 3 点共线，则在此 5 点中，必存在 4 点，构成一个凸四边形。

本引理可证明如次：5 个点之间，共可作出10条线，整个与所给 5 点有关的图形，有一周界，若这个周界是 5 边形或 4 边形，则定理已证，若整个图形的周界是一个 3 角形则其余二点，必含在三角形内（见图13.2），联V_4，V_5，则三角形的三个顶必有二点在此线的同侧，如图中的V_4, V_5, V_2, V_3，于是此四点构成一个凸四边形，

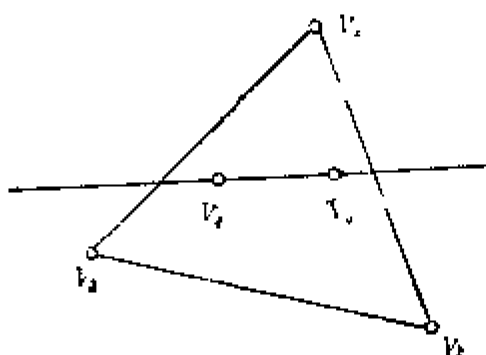


图 13.2

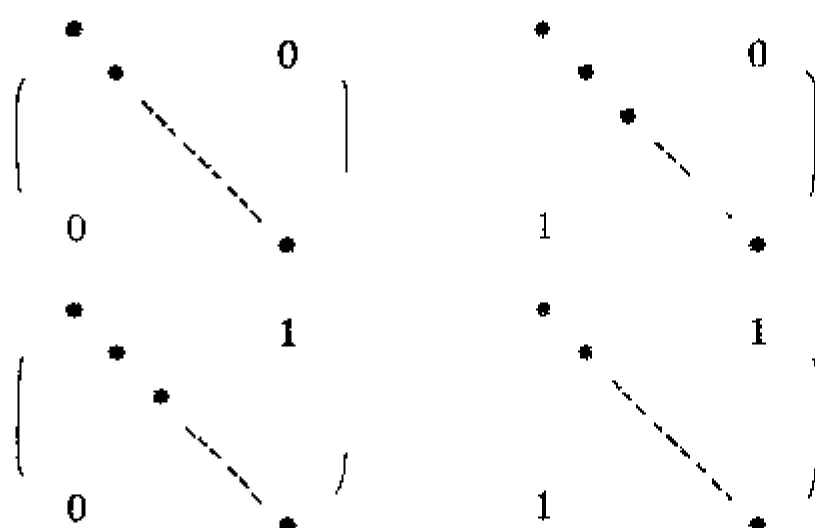
引理13.2 在平面上，任给m点，无三点共线，若由此m点所可能构成的一切四边形，都是凸四边形，则原给的m点，构成一个凸m点形。

引理13.2的证 将m个点，每二点联线，共$m(m-1)/2$条线段，设图形的周界是一个凸q点形，V_1，V_2，…，V_q，若$q=m$，定理已证，若$q<m$，则原给的m点中，余下来的$m-q$个点在q点形之内，至少将有一点，在三角形$V_iV_jV_k$（$i,j,k\leqslant q$）之内。但这不可能，因若在三角形$V_iV_jV_k$之内，存在一点Q，则此四点，构成一个凹四点形，这和假设矛盾。

现在来证性质（定理）。原给$m\geqslant3$，若$m=3$，三点又不在一条直线上，自然构成三顶的凸三角形。现设$m\geqslant4$，作$N(5,m;4)$，当$n\geqslant N(5,m;4)$时在n点中任取四点为一组，有些构成一个凹四点形，有些构成一个凸四点形，依此来给n—集S的所有的4—子集分类，则据拉姆绥定理，存在子集$(5,A_1)$或子集(m,A_2)，据引理13.1$(5,A_1)$是不能存在的，只能存在(m,A_2)即存在m—点集，于其中任取4点，均构成一个凸四点形，据引理13.2，此m点构成一个m点的凸多边形。

例3 任给一个n阶的（0，1）矩阵，在其中除去$n-m$列及相应的$n-m$个行，得一个所谓的m阶主子矩阵，关于（0，1）矩阵，便有下

定理 任给正整数m，作n阶（0，1）—矩阵，当n充分大，则在此矩阵中，必含一个m阶主子矩阵，是下四种形式之一：



证 设$A=(a_{ij})$是原给的n阶（0，1）一矩阵，取其n个行，作为n个元素，构成集合S，在S中任取二行a_i，a_j（$i<j$）构造向量（a_{ij}，a_{ji}），这个向量，只能有四种形式（0，0），（0，1），（1，0），（1，1），将矩阵的行集，作分划

$$P_2(S)=A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4。$$

设 $n\geqslant N(m,m,m,m;2)$，

则据拉姆绥定理，将存在S的m一子集，其所有的2一子集，含在$P_2(S)$的四个分划的其一分划组内，此即说明存在上子矩阵，属于上述四种形式之一。（证毕）

§3 拉姆绥定理在图论上的应用

我们已熟知，所谓图，是已给n顶，再适当联二顶点，得到图的边$G=(X,E)$，X是图G的顶集，E是图G的边集，设在顶集X中，有q_1个顶，其中每二顶的联线都是图G的边，则这q_1个顶组成图G的一个集团，设有q_2个顶，其中每二顶的联线，都不是G的边，则这q_2个顶构成图G的一个稳固集，若引入图G的补图$\overline{G}$，则G中的集团和稳固集，便分别是$\overline{G}$里的稳固集和集团，已给q_1，q_2（$\geqslant 2$），据拉姆绥定理，

确定

$$N(q_1, q_2; 2),$$

则当$n \geqslant N(q_1, q_2, 2)$时，在$n$阶的图$G$里，恒存在$q_1$阶的集团，或$q_2$阶的稳固集，由于讲的是图论，现在便从图论的角度，来阐明$N(q_1, q_2; 2)$的一些特殊性质：

1，$N(q_1, q_2; 2) = N(q_2, q_1; 2)$。

2，$N(q_1, 1; 2) = N(1, q_2; 2) = 1$。

据原给的拉姆绥数的定义，q_1，q_2，及r本应满足条件(1)，不过在图里，我们允许有所谓1一阶的集团，或1一阶的稳固集存在，则以上这些数是很明显的。

3，$N(q_1, 2, 2) = q_1$，$N(2, q_2; 2) = q_2$。

4，定理13.2 设q_1，$q_2 \geqslant 2$，则

$$N(q_1, q_2; 2) \leqslant N(q_1-1, q_2; 2) + N(q_1, q_2-1; 2)。$$

证 据定理13.1的证明（二），显见

$$N(q_1, q_2; 2) \leqslant N(p_1, p_2; 1) + 1,$$

其中 $p_1 = N(q_1-1, q_2; 2), p_2 = N(q_1, q_2-1; 2),$

但据§1的特例1，

$$N(p_1, p_2, 1) = (p_1-1) + (p_2-1) + 1 = p_1 + p_2 - 1,$$

于是 $N(q_1, q_2; 2) \leqslant p_1 + p_2$

或 $N(q_1, q_2; 2) \leqslant N(q_1-1, q_2; 2) + N(q_1, q_2-1; 2)$。

（证毕）

这个定理，还可直接证明如次：

命G是一个含$N(q_1-1, q_2; 2) + N(q_1, q_2-1, 2)$个顶的图，在顶集中，任取顶$V$，则下二情况，必有一成立。

(i)V与至少含$N(q_1, q_2-1; 2)$个顶所成的集合S不相邻，

(ii)V与至少含$N(q_1-1, q_2; 2)$个顶的集合T相邻。

由于与V相邻的点数和与V不相邻的点数，其和为$N(q_1-1, q_2; 2) + N(q_1, q_2-1; 2) - 1$故上二情况，必

有一成立。

在情况(i)，由于数$N(q_1, q_2-1; 2)$的性质，$G(S)\cup V$或者含q_1集团，或者含q_2一稳固集，在(ii)则$G(T)\cup\{V\}$，或者含q_1一集团，或者含q_2稳固集，由于(i)或(ii)必有一成立，故图G或者含q_1一集团，或者含q_2一稳团集。

（证毕）

由此，便甚易推得以下

推理13.2。 若$N(q_1-1, q_2; 2)$与$N(q_1, q_2-1; 2)$都是偶数，则

$$N(q_1, q_2; 2) \leqslant N(q_1-1, q_2; 2)+N(q_1, q_2-1; 2),$$

证 设G是一个图，具$N(q_1-1, q_2; 2)+N(q_1, q_2-1; 2)-1$个项，由于$G$有奇数个项，故$G$必存一个偶次项$V$，$V$当然不能恰与$N(q_1-1, q_2; 2)-1$个项相邻，故在上定理的证明中，(i)与(ii)有一成立，故G或者含一个q_1集团，或者含一个q_2稳固集，故

$$N(q_1,q_2;2)\leqslant N(q_1-1,q_2;2)+N(q_1,q_2-1;2)-1。$$

（证毕）

推理13.2' $N(q_1,q_2;2)\leqslant\binom{q_1+q_2-2}{q_1-1}$

证 设$q_1=2$，则

$$\binom{q_1+q_2-2}{q_1-1}=\binom{q_2}{1}=q_2$$

但 $N(q_1, q_2; 2)=N(2, q_2; 2)=q_2$，

故在$q_1=2$时，上不等式能成立，当$q_1'+q_2'\leqslant q_1+q_2$时，

若有$N(q_1', q_2'; 2)\leqslant\binom{q_1'+q_2'-2}{q_1'-1}$，则

$$N(q_1, q_2; 2)\leqslant N(q_1-1, q_2; 2)+N(q_1, q_2-1; 2)-1+1$$

$$\leqslant\binom{q_1-1+q_2-2}{q_1-2}+\binom{q_1+q_2-1-2}{q_1-1}$$

$$-\binom{q_1+q_2\ \ 2}{q\ \ \ \ 1}$$

（证毕）

定理13.2与推理13.2$_a$所确定的$N(q_1, q_2; 2)$的上限，一般都比较好，比较接近欲求的真正的数。

在文献中也有很多确定$N(q_1, q_2; 2)$的下限的，但一般与真正的数的距离比较大，在实际计算中，所起的作用是比较小的，下定理所确定的便是一个例。

定理13.3 （Erdos[1947]）$N(k, k; 2) \geqslant 2^{k/2}$。

证 任取n个点$\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，取二点联边，共有$\binom{n}{2}$条边。取这$n$个点做顶，在这些联线中任取若干个做边，总可做成一个图，这些图构成一个集合，记作G_n，这个集合的维是

$$|G_n| = 2^{\binom{n}{2}}$$

在n个顶中，任取k个顶，做成一个k—集团，取此k—集团做为其所含集团的图，共有$2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}}$个，但在$n$个顶中任取$k$个顶，共有$\binom{n}{k}$个取法，若取$G_n^k$记这样的图的集合，则

$$|G_n^k| < \binom{n}{k} 2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}}$$

故 $$\frac{|G_n^k|}{|G_n|} \leqslant \frac{\binom{n}{k} 2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}}}{2^{\binom{n}{2}}} =$$

$$=\binom{n}{k}2^{-\binom{k}{2}}<\frac{n^k}{k!}2^{-\binom{k}{2}}$$

故当$n<2^{k/2}$时：

$$\frac{|G_n^k|}{|G_n|}<\frac{1}{2}$$

同理，在n个顶$\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$所成的图集，找含$k$—稳固集的图，这些图，构成一个集合，它的个数与$G_n$的个数的比，也小于1/2，即在$G_n$中，含$k$-集团的图，其个数少于$|G_n|$的一半，在$G_n$中，含$k$—稳固集的图，其个数也少于$|G_n|$的一半，故在$G_n$中必有图，既不含$k$—集图，也不含$k$—稳固集，故

$$N(k, k;\ 2)\geqslant 2^{k/2}。$$

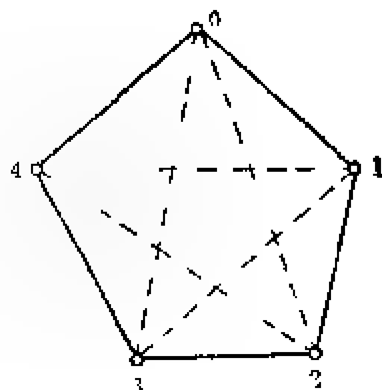


图 13 3

定理13.4 $N(3,3;2)=6$。

证 据定理13.2知

$$N(3,3;2)\leqslant N(2,3;2)+N(3,2;2)=6,$$

作图K_5，记其5个顶为0，1，2，3，4，凡二数之差为1的，联边染红，其他一对一对的点联边染绿，则这个K_5的边染色法中，每组同色边集中既无3—集团，也无3—稳固集，故应有$N(3,3;2)>5$，

或 $N(3,3;2)\geqslant 6$，

综合这两种情况，有

$$N(3,3;2)=6。$$

定理13.5 $N(3,4;2)=9$。

证 据推理13.2b、$N(2,4;2)=4$，$N(3,3;2)=6$，二者都是偶数，故

$$N(3,4;2) \leqslant 4+6-1=9。$$

作8阶的完全图K_8：记其顶为0，1，2，3，4，5，6，7，凡二数之差为1或4的联边，染红，其他一对点联边染绿，则这个K_8的图，既无红三角形，也无绿完全四点形，故

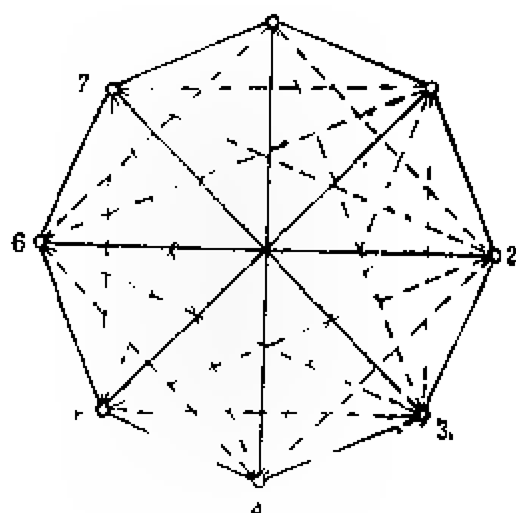


图 13 4

$$N(3,4;2)>8,$$

或 $$N(3,4;2) \geqslant 9。$$

综合这两种情况，乃有

$$N(3,4;2)=9。$$

（证毕）

定理13.6 $N(3,5;2)=14$。

证 据定理13.2，有

$$N(3,5;2) \leqslant N(2,5;2)+N(3,4;2)=5+9=14。$$

作13阶的图，顺次记其顶为0，1，2，3，4，5，6，7，8，9，10，11，12，其中是13的3次剩余的，有1，5，8，12，凡二顶记数之差是13的3次剩余的，联边，则这个图既无3—集团，也无5—稳固集，故$N(3,4;2) \geqslant 14$，综合二者，乃有定理。

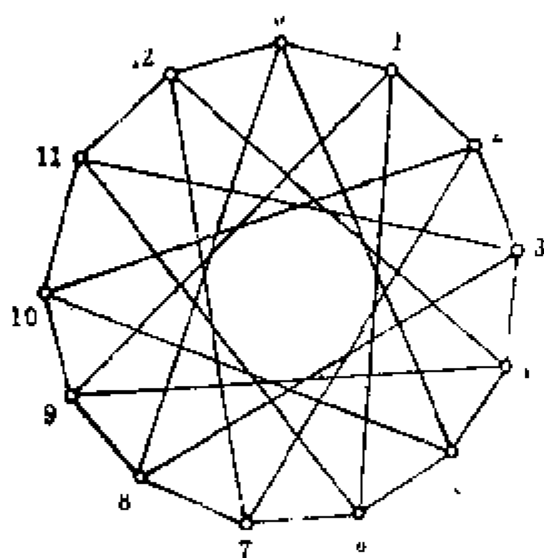


图 13·5

（证毕）

定理13.7 $N(4,4;2)=18$。

证 $N(3,4,2)=N(4,3;2)=9$

故 $N(4,4;2) \leqslant 9+9=18$

作17阶图，顺次记其顶为0，1，2，3，4，5，6，

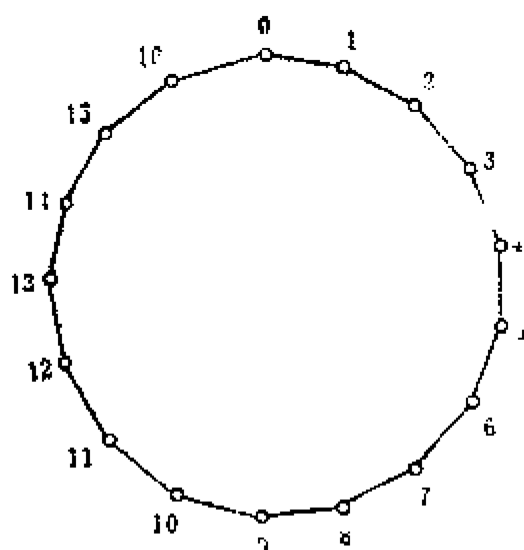


图 13.6

7，8，9，10，11，12，13，14，15，16，任取二项，其标号之差是17的2次剩余数的联边，17的二次剩余数共有1，2，4，8，9，13，15，16按这个规律联边所得的17阶图，无4—集团，也无4—稳固集，故

$$N(4,4;2)\geqslant 18。$$

综合上二情况，乃有$N(4,4;2)=18$。

定理13.8 $N(3,6;2)=18$。

证 $N(2,6;2)=6$，$N(3,5;2)=14$，二者都是偶数，据推理13.2，乃有$N(3,6;2)\leqslant 19$。

此时不能再用上定理的图13.6，因在这个图里确有3—集团，比如0，8，9三点，便构成了一个3—集团，08应联边，09应联边，8，9之差是1，也应联边，这便是一个3—集团，但Greenwood与Gleason（1955）和Kalbfleisch与Stontou（1968）分别找到了16点形，将其边3—着色，图中出现没有同色的三角形，这便证明了$N(3,6;2)\geqslant 17$，综合两种情况，证明了$N(3,6;2)=17$或18或19。

作K_{17}，可以将其边染色使不出现3—集团或6—稳固集。即$N(3,6,2)\geqslant 18$.再往证$N(3,6;2)\leqslant 18$.二者综合乃有　　$N(3,6;2)=18$。

读者对此如有兴趣，可参看：

1．Andrew Sobcqyk，Graph Coloring and Combinatorical Numbers Cand.J.Math.20(1968)520—534.

2．J.G.Kalbfleisch，Construction of Special edge-Chromatic Graphs，Canada Math.Bull.8(1965)525—584。

§4 $N(\underbrace{3, 3, 3, \cdots, 3}_{t}; 2)$的确定

以上只讨论了拉姆绥数$N(q_1, q_2; 2)$，但拉姆绥数$N(q_1, q_2, \cdots, q_t; 2)$如何确定，全未涉及，以下将专门研究$N(\underbrace{3, 3, \cdots, 3}_{t}; 2)$的确定，为此，先对这个数作以下解释。

所谓将n-集S所有2—子集作分划

$$P_2(S) = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_t$$

实际上可以理解为将n阶图的边用t种颜色加以涂染，每种颜色的边集即上分划中的一个A_i。所谓存在子集(q_i, A_i)，乃存在q_i点集所成集团中的每一边都是第i色，特别当$q_1 = q_2 = \cdots = q_t = 3$，则$(q_i, A_i)$意即有三角形，其三边统是第$i$色，为此，引进下概念：**好着色**，将单纯图$G = (X, E)$的边着色，使涂染的结果，没有一个三角形的三边同色，设$n(q)$记最大完全图的阶数，该图是可好q着色的。

设用$N(\underbrace{3, 3, \cdots, 3}_{q}; 2)$记拉姆绥数，则显见

$$n(q) = N(\underbrace{3, 3, \cdots, 3}_{q}, 2) - 1。$$

定理13.9 设$n(q)$是一个边好q着色的完全图的极大阶数，则

$$n(q) \leqslant q! \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!}$$

证 设$n(q)$是一个边好着色的完全图的极大阶数，在$K_{n(q)}$中任意取定a，自a到其他各顶联边，这些边都染以第i种颜色，命这些顶点所成集合为A_i，则完全图K_{A_i}的边将是好—$(q-1)$—着色的，

故 $\quad |A_i|\leqslant n(q-1)$，

故 $\quad n(q)-1=d_K(a)=\sum\limits_{i=1}^{q}|A_i|\leqslant q\cdot n(q-1)$。

但显有

$$n(1)\leqslant 1+1$$

$$n(2)\leqslant 2n(1)+1$$

$$\cdots\cdots$$

$$n(q-1)\leqslant (q-1)n(q-2)+1$$

$$n(q)\leqslant qn(q-1)+1$$

故 $\quad n(q)\leqslant 1+q+q(q-1)+\cdots+q!+q!=\sum\limits_{k=0}^{q}\frac{q!}{k!}$。

取 $\quad f(q)=q!\sum\limits_{k=0}^{q}\frac{1}{k!}$，上公式可以写成

$$n(q)\leqslant f(q)。$$

当$q=1,2,3$，有$n(q)=f(q)$，当$q=1$，$f(1)=2$，而K_2确有一个好1一着色，故$n(1)=2$。对于$q=2$，有$f(2)=5$，而K_5有一个好2着色，故$n(2)=5$。对于$q=3$，有$f(3)=16$，而K_{16}恰有两个不同构的好3-着色，故$n(3)=16$。对于$q=4$，有$f(4)=65$。但目前尚未找到K_{65}的好-4一着色，但已找到了K_{64}的好4-着色①。

Jon Folkman于1974年自K_{16}的性质，研究了K_{65}的性质，证明了$n(4)\neq 65$，故$n(4)\leqslant 64$，但已知对K_{64}有一个好一4一着色，故$n(4)\geqslant 64$，综合二者，知$n(4)=64$，于是

$$N(3,3,3,3;2)=64+1=65。$$

总结本章研究的结果，到目前为止，所有已知的拉姆绥数是

①. K_{64}的一个好一4一着色 见C. Berge. Graphs amd Hypergraphs(英译本)P 441. 但未指明出处，这里推出$N(3,3,3,3:2)=65$在一般文献上均未得见。

$N(q_1, q_2; 2)$

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7
3	1	3	6	9	14	18	23①
4	1	4	9	18			
5	1	5	14				
6	1	6	18				
7	1	7	23①				

$N(3,3,3;2)=17$,

$N(3,3,3,3;2)$ 65.

……

关于拉姆绥数$N(k, l; 2)$的确定，最近有新的成果，它是

k \ l	3	4	5	6	7
3	6	9	14	18	23
4		18	28	44	66
5			55	94	156
6				178	322
7					626

读者如有兴趣，可参看：Journal of Combinatoial Theory, Series B, Vol. 27, No. 3, DeC. 1979.

① $N(3, 7; 2)=23$, 是R Graham的研究成果见 R Graham, On Edgewise 2—Colored Graphs with Monochromatic Triangles and Containing no Complete Hexagon, J. Comb. Theory, 4, 1968, 300～301

习　题

1．试证明：（1）在一个边长为1的正三角形内任取5点，则其中至少有2点，其间距离至多为1／2。（2）在一个边长为1的正三角形内任取10点，则其中至少有2点，其间距离至多为1／3。（3）试求一个正整数$f(n)$，使得在边长为1的正三角形内任取$f(n)$个点，至少其中有2点，其间的距离不大于1／n。

2．设q_3及t均为正整数且$q_3 \geq t$，试求拉姆绥数$N(t, t, q_3, t)$。

3．设$q_1, q_2, \cdots, q_n$与t均正整数，$q_i \geq t$对$i=1, 2, \cdots, n$均成立，又设$r=\max\{q_1, q_2, \cdots, q_n\}$，试证明：$N(\underbrace{r, r, \cdots, r}_{n\text{个}}; t) \geq N(q_1, q_2, \cdots, q_n; t)$。由此导出：欲证明拉姆绥定理，只须在$q_1=q_2=\cdots=q_n$的情形下证明即可。

4．试证明：

$N(q_1, q_2, \cdots, q_m; 2) \leq N(q_1-1, q_2, \cdots, q_m; 2)+N(q_1, q_2-1, \cdots, q_m; 2)+\cdots+N(q_1, q_2, \cdots, q_m-1; 2)-m+2$。

5．试证明：$N(q_1+1, q_2+1, \cdots, q_m+1; 2) \leq \dfrac{(q_1+q_2+\cdots+q_m)!}{q_1!\, q_2! \cdots q_m!}$。

6．以N_q来记$N(\underbrace{3, 3, \cdots, 3}_{q\text{个}}; 2)$，试证明：

（1）$N_q \leq q \cdot (N_{q-1}-1)+2$。

（2）注意到$N_2=6$，用（1）证明　$N_q \leq (q!\, e)+1$

（3）推导出$N_3 \leq 17$。

7．单纯图G与H的合成定义为一个单纯图$G(H)$，其顶点集为$X(G) \times X(H)$，两点(x, y)与(x^1, y^1)相邻的充要条件是$[x, x^1] \in E(G)$或者$x=x^1$且$[y, y^1] \in E(H)$，又以$\alpha(G)$表示图G的最大稳固集的维数，试证明：

（1）$\alpha(G(H)) \leq \alpha(G)\alpha(H)$；

（2）用（1）证明：

$N(kl+1, kl+1; 2)-1 \geq (N(k+1, k+1; 2)-1)(N(l+1, l+1; 2)-1)$。

（3）由此导出：$N(2^n+1, 2^n+1; 2) \geq 5^n+1$，对一切$n \geq 0$均成立。

8 试证明 C_3与C_5的和C_3+C_5（即以2个长度分别为3及5的初级圈，使其中一个圈上的所有点均与另一个圈上的点联边所得之图），不含K_6，但是每一种边的二色染法均导致出现同色三角形。

9．设G_1，G_2，…，Gm是单纯图，广义拉姆绥数$N(G_1, G_2, \cdots, G_m)$是这样一个最小正整数n，它使K_n的所有的边m色染法（E_1，E_2，…，E_m）中都含有一个对某个i而言同构于G_i的第i种色的部分图。试证明

（1）如P_3是长为3的初级链，C_4是长为4的初级圈，则：$N(P_3, P_3)=5$，$N(P_3, C_4)=5$，$N(C_4, C_4)=6$；

（2）设T是m个顶点上的任一棵树，如$m-1$可整除$n-1$，则$N(T, K_{1,n})=m+n-1$；

（3）如T是m个顶点上的任一棵树，则$N(T, K_n)=(m-1)(n-1)+1$。

10 设（S_1，S_2，…，S_n）是整数集{1，2，…，N_n}的任一划分，其中$N_n=N(3, \underbrace{3, \cdots, 3}_{n个}; 2)$，则总有某个$i$使$S_i$中含有满足方程$x+y=z$的三个整数$x$，$y$和$z$。

11．以S_n表示满足下列条件的最小整数：即将整数集{1，2，…，S_n}分为n个子集合的任一个划分中，均至少有一个子集合含有满足方程$x+y=z$的三个数x, y, z（x, y, z不一定不同），试证明：$S_1=2$，$S_2=5$，$S_3=14$。

12．记号S_n的意义如上题，试证明

（1）$S_n\geq 3S_{n-1}-1$，

（2）由（1）及$S_3=14$的事实证明：$S_n\geq \frac{1}{2}(27\cdot(3)^{n-3}+1)$。

13 试证明：如$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$是平面上直径为1的点集（即任两点间的距离最大为1），则其中距离大于$1/\sqrt{2}$的点对的最大可能个数是$[n^2/3]$，而且此上界总是可以达到的。

14 设$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$是平面上直径为1的点集，

（1）试证明：距离为1的最大可能点对数是n；

（2）在平面上构造一个直径为1的点集合，恰好使其具有n对点距离为1。

15 半径为6英里的平面园形城市，由十八个警车巡逻，它们间用无线电通讯，若一个无线电的范围为9英里，试证明：不管什么时候，至少有两个车，至少可以和其余6个车通讯。

第十四章 超　图

§1 基本概念

在以上各章讲图的理论时，我们已熟知一个图，就是在一个n—集X里，任取若干个2—子集，其所成集合记为E，集X和E所构成的组合，叫做**图**。n—集X里的元素，叫做图的**顶**，2—子集E里的元素叫做图的**边**，一般记为图$G=(X,E)$。把这个概念推广一下，已给n—集X，在这个n—集里任选若干个子集，这里子集不一定都是2元的，这样的组合，我们依旧把它们叫做**图**，集X里的元素，照样叫做图的**顶**，子集照样叫做图的**边**，不过这时图的边也就不一定只含两点了，我们把这样的图叫做**超图**。在超图里也可能含有环，即一条边只含一个顶。若边只含二顶，照样用一条约丹曲线把它们联接起来，若一条边包含多于两个顶的，可用一条封闭的约丹曲线，把它们包围起来。超图记作

$$H=(X,\mathscr{E})。$$

X是超图H的顶集，$\mathscr{E}$是超图H的边集，如右图14.1便是一个超图，其顶集是

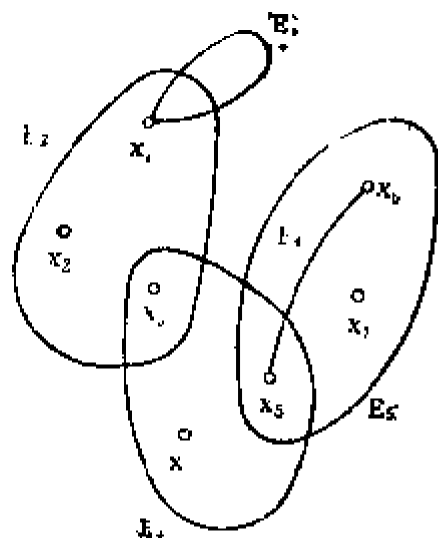


图 14.1

$$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_5,x_6,x_7\},$$

边集是 $\mathscr{E}=\{E_1,E_2,E_3,E_4,E_5\}$。

在这个超图里，边E_1是一个环，边E_4含在边E_5内。

提出超图，其目的不只是把图的概念予以推广，还要把以前研究图所得的结果，推广到超图上来，看那些结果，照样成

立，那些结果，可有什么变化和推进。

在超图H里，若二顶共边，则此二顶称为**相邻**，同样，若二边有公共顶，则此二边也叫做**相邻**。

超图同样有它的顶边结合矩阵（a_{ij}），这是一个（0,1）一矩阵，取超图的边为列顶为行，并取

$$a_{ij}\ \begin{cases}1 & \text{当}x_i\in E_j\ ,\\ 0 & \text{当}x_i\notin E_j\ 。\end{cases}$$

同样可取（a_{ij}）的转置矩阵（a_{ij}）′，也得一个（0,1）一矩阵，这个矩阵也表示一个超图，取原超图H的顶为边，原超图H的边为顶，不改变顶边结合关系，这样的超图叫做原超图的**对偶超图**，记作H^*，由此显见（H^*）$^*=H$，即超图H的对偶图H^*，其对偶图是原来的超图。

已给超图 $H=(X,\mathscr{E})$，在X中任取子集$S\subset X$（$S\neq\phi$），函数

$$r(S)=\max_i|S\cap E_i| \qquad (E_i\in\mathscr{E})$$

称为超图H的**秩函数**，实际上这是超图H的边含在顶集S里的极多顶数，若取$S=X$，则

$$r(X)=\max_i(X\cap E_i) \qquad (E_i\in\mathscr{E})$$

称为超图H的**秩**，它是超图H里边所含顶点的极大个数。设对每一i有$|E_i|=r(X)$，此时，H所有的边上的顶点个数相同，超图H叫做秩为$r(X)$匀称的。譬如没有孤立点的图$G=(X,E)$，便是一个秩为2的匀称图。

和一般图一样，超图也有所谓部份图与子图，在$\mathscr{E}$里任取子集$\mathscr{F}\subset\mathscr{E}$，用$\mathscr{F}$做为边集构成超图$H_{\mathscr{F}}=(X_{\mathscr{F}},\mathscr{F})$其中$X_{\mathscr{F}}=\bigcup\limits_{E_i\in\mathscr{F}}E_i$，则$H_{\mathscr{F}}$称为超图$H$的**部份超图**，又若在$X$里任取子集$A\subset X$（$A\neq\phi$），在每一边上保留顶点含在$A$里的做为边、构成边集$\mathscr{E}_A$，得超图$H_A=(A,\mathscr{E}_A)$，其中

$A \neq \phi$，$A \subset X$，$\mathscr{E}_A = \{E_i \cap A / i \in I, E \in \mathscr{E}, E_i \cap A \neq \phi\}$。

设$r(S)$是超图H的秩函数，则子图H_A的秩函数便是$r_A(S \cap A)$，当$S \subset A$，自有$r_A(S) = r(S)$。

由于超图H的边中，可能包含很多个点，于是便产生所谓k—截这个概念，超图H的k—截定义为

$$H_k = (X, \mathscr{E}_k)。$$

H_k仍是一个超图，其顶集仍旧是X，其边集，则在原来的每一边上取不超过k个点做边，亦即$H_k = (X, \mathscr{E}_k)$，其中

$$\mathscr{E}_k = \{F / F \subset X, 1 \leqslant |F| \leqslant k, F \subset \text{某一边} E_i, E_i \in \mathscr{E}\},$$

这个k截H_k是一个单纯图，在每一点上有一个环，且若原超H的秩函数是$r(S)$，则k—截H_k的秩函数

$$r_k(S) = \min\{k, r(S)\}。$$

在k—截中，我们特别感兴趣的，当然是2—截H_2，设在这个H_2上舍弃每一顶上的环便得一个单纯图，其每一边只含2—顶，这样的图，记作$(H)_2$。

很明显，$(H)_2$是一个平常的图，它的顶集是原超图的顶集，它的边是在H的每一边里（当这条边上顶点的个数$\geqslant 2$时），任取二顶的联边，H的每条边，在$(H)_2$里对应一个集团，反过来不一定正确。

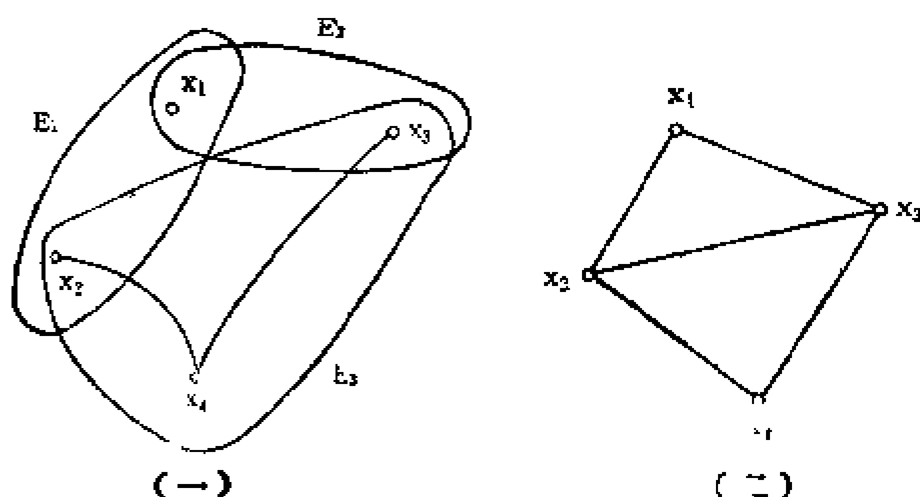


图 14.2

在上图14.2里，（一）是原超图，（二）是它的$(H)_2$，在$(H)_2$里（x_2,x_3,x_4）构成一个集团，这是原图H的一条边E_3，但集团（x_1,x_2,x_3）不对应于H的边，在H里没有那一条边，包含这些顶，在图H里因边上的顶点可能多于2，故在一条边里，可能再含有边。例如（一）中的边〔x_2,x_4〕与〔x_3,x_4〕均含在边E_3内，若在超图里一条边E，不被其他的边所包含，则这样的边称为是极大的，同样，在$(H)_2$里，任一集团，不被其他集团所包含的，也叫极大。在H里有极大边集$\mathscr{E}_{max}$，在$(H)_2$里也有极大集团集$\mathscr{C}_{max}$，若H与$(H)_2$有关系$\mathscr{E}_{max}=\mathscr{C}_{max}$，则超图$H$叫做**保形的**，图14.2的超图$H$，不是保形的，因在$(H)_2$里集团($x_1,x_2,x_3$)是极大的，但在$H$里根本就没有这样的边。关于保形图，有下基本

定理14.1 超图H是保形的其充分和必要条件是图$(H)_2$的每一集团，都含在H的一条边内。

证 $(H)_2$的每一集团，总含在一个极大集团内，这个极大集团，据定理假设，含在H的一条边内，这条边在H里必极大，故

$$\mathscr{C}_{max}\subseteq\mathscr{E}_{max}.$$

反过来，H里任一极大边$E\in\mathscr{E}_{max}$，在$(H)_2$里对应一个集团，这个集团必极大。否则在$(H)_2$里将有极大集团C包含这个集团，但据假设，C含在H的一条边内，故原来的极大边也就不极大了，从而

$$\mathscr{E}_{max}\subseteq\mathscr{C}_{max},$$

于是 $$\mathscr{E}_{max}=\mathscr{C}_{max}.$$

即图H是保形的。 （证毕）

§2 超图的链和圈

在超图H上也有所谓链和圈，设在超图$H=(X,\mathscr{E})$里存

在一个点边序列

$$\mu=(x_1E_1x_2E_2\cdots E_qx_{q+1}),$$

其中x_i是H的相异顶，E_i是H的相异边，且

$$x_k,x_{k+1}\in E_k \qquad (k=1,2,\cdots,q)$$

序列μ中共含q个相异边，若$x_{q+1}\neq x_1$，序列μ是H的一条（初级）链其长为q，若$x_{q+1}=x_1$，序列μ便是H的一条（初级）圈，其长为q。

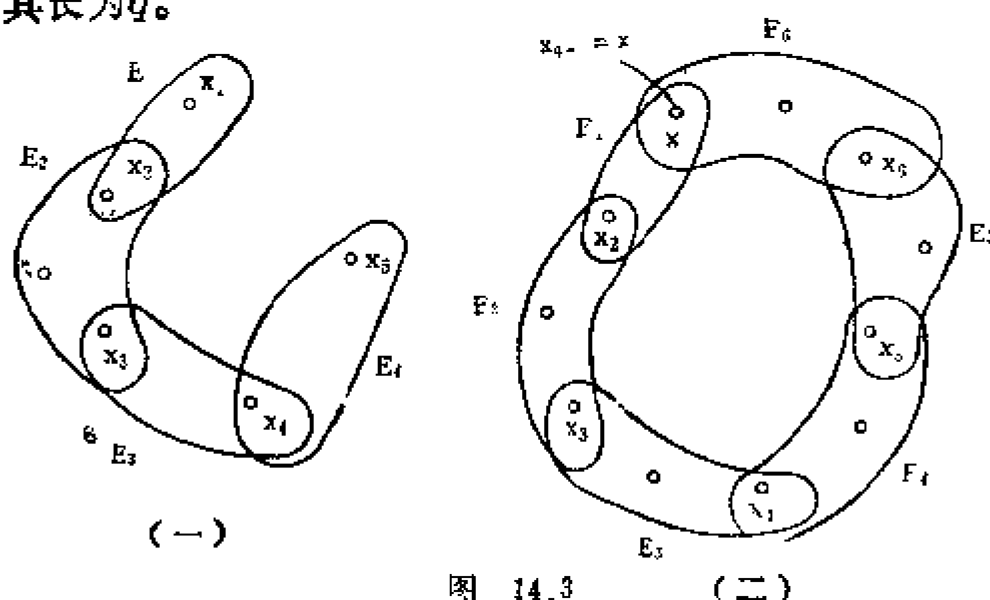


图 14.3

图14.3中的（一）是一条链，（二）是一个圈，二者的长分别是4与6。

若超图H上有链起于顶a，止于顶b，便书

$$a\equiv b。$$

读者不难证明"$\equiv$"是一个等价关系，此时称a到b是联接的。若在超图H上任取二顶x、y，总有$x\equiv y$，则H称为是联接的。由于等价关系，便可将任一超图H分成若干个等价部份，称为超图的联接的分子图，若C是超图H的一个联接的分子图，C与边E相交，则C必包含边E。所谓C与边E相交，即在C中有边与E相交，故E与链中的任一边都有等价关系，故E属于C。

在第三章，我们曾经讲过一个图$G=(X,E)$的圈维数$\nu=m-n+p$，其中$m=m(G)$是G的边数，$n=n(G)$是G的顶数（即G的阶），p是G的联接的分子图的个数，图G无圈

的充要条件是

$$\nu = m - n + p = 0。$$

在超图H里，在什么情况下，H才没有圈呢？于此，有下

定理14.2 设超图$H = (X, \mathscr{E})$含n顶，m边，p个联接的分子图，则H无圈的充要条件是

$$\sum_{i=1}^{m} (|E_i| - 1) = n - p。 \qquad (1)$$

证 作两分图$G(H)$，取超图H的顶做为两分图$G(H)$的一组顶，取H的边做为$G(H)$的另一组顶，当且仅当顶x_j在边E_i上便联边$x_j E_i$作为$G(H)$的一边，这个两分图$G(H)$共有$m+n$个顶，$\sum_{i=1}^{m}|E_i|$条边，p个联接的分子图。超图H无圈，当且仅当两分图$G(H)$无圈。且若H有p个联接的分子图，则$G(H)$也有p个联接的分子图。两分图无圈的充要条件是

$$\nu = \sum_{i=1}^{m} |E_i| - (m+n) + p = 0,$$

或

$$\sum_{i=1}^{m} (|E_i| - 1) - n + p = 0,$$

此即(1)。

（证毕）

推理14.2a 设超图H是联接的，则H无圈的充要条件是

$$\sum_{i=1}^{m} (|E_i| - 1) = n - 1。$$

证 在(1)中，取$p = 1$即得。 （证毕）

又若$|E_i| = 2$对一切i均成立，超图H便是一个一般的图，此时公式(1)便转化为$m - n + p = 0$。

推理14.2b 设$H = (X, \mathscr{E})$是一个超图，其中

$$\mathscr{E} = \{E_i / i \in I\},$$

则H不含圈的充要条件是

$$\left|\bigcup_{i\in J} E_i\right| > \sum_{i\in J}(|E_i|-1) \qquad (J\subset I,\ J\neq\phi)$$

对一切$J\subset I$均成立。

证 设H包含一个圈，

$$\mu = (a_1E_1a_2E_2\cdots E_qa_1),$$

其长为q，命$Q=\{1,2,\cdots,q\}$，圈中所含的相异顶集记作$\bigcup_{i\in Q}E_i$，其中每相邻的二边，有一公共顶a_i，故

$$\left|\bigcup_{i\in Q}E_i\right| \leqslant \sum_{i\in Q}|E_i-\{a_i\}| = \sum_{i\in Q}(|E_i|-1)。$$

此证，当H有圈，推理14.2$_b$中的条件不成立。

设超图H不含圈，则任一部份边族$\{E_i/i\in J,\ J\subset I\}$也不含圈，取此边族，做成一个部份超图，设此部份超图有p个联接的分子图，据定理14.2，有

$$\sum_{i\in J}(|E_i|-1) = \left|\bigcup_{i\in J}E_i\right| - p < \left|\bigcup_{i\in J}E_i\right|,$$

或

$$\left|\bigcup_{i\in J}E_i\right| > \sum_{i\in J}(|E_i|-1)。$$

此式对任一部份边族均成立，故推理的结果能成立。

以上证明了若超图H有圈，推理的结论不成立，若超圈H无圈，推理的结论能成立，故推理得证。

（证毕）

推理14.2$_c$ 超图$H=(X,\mathscr{E})$无孤立点，具p个联接的分子图，含n个顶，和唯一一个圈，其充要条件是

$$\sum_{i=1}^{m}(|E_i|-1) = n-p+1。$$

证 在定理2的证明中，所定义的两分图$G(H)$上，有p个联接的分子图，$m+n$个顶，$\sum_{i=1}^{m}|E_i|$条边，恰有一个圈，其充要条件是

$$\nu=\sum_{i=1}^{m}|E_i|-(m+n)+p=1。\qquad（证毕）$$

§.3 超图的代表图

已给超图$H=(E; X_1,X_2,\cdots,X_n)$取$H$的边做顶$x_1, x_2,\cdots,x_n$，当且仅当两边$X_i\cap X_j\neq\varnothing$时，始将$x_i$与$x_j$联边，得图$G$，这个图称为超图$H$的**代表图**，记作$G=L(H)$，图$G$所代表的只是超图$H$的边及其间的相互关系。很明显，图$G$是单纯的。设$H=(E; X_1,X_2,\cdots,X_n)$，其中每个$X_i$都是$E$的一个子集合，作其顶边结合矩阵，再作

$$H^*=(X; E_1,E_2,\cdots,E_m),$$

显见H的代表图$G=L(H)$的结合矩阵，是H^*的结合矩阵的一部份（对应于E_i的每个列只取两个"1"），于此有下

定理14.3 设G是一个单纯图，具顶集X，再设$\{E_1,E_2,\cdots,E_n\}$是X的一个子集族，具下列性质：

（1）每一E_i是G的一个集团（即E_i中每二点的联线都是G的边）。

（2）G的每个顶和每条边至少被一个E_i所复盖，则G是超图$H^*=(X;E_1,E_2,\cdots,E_m)$的对偶图$H$的代表图。

反之，设G是超图$H=(E;X_1,X_2,\cdots,X_m)$的代表图，则H的对偶图$H^*=(X;E_1,E_2,\cdots,E_m)$满足特性（1）与（2）。

证 据代表图的意义，G的点边结合矩阵，实际上是H^*的结合矩阵的一部份，在G的结合矩阵中，每列E_j含二非零元素"1"的，这两个"1"相应的行设为x_i与x_k则E_j便可视为G的二顶x_i与x_k的联边。在H^*的结合矩阵里$a_{ij}=a_{kj}=1$，反

映到H的结合矩阵上来，便是a_{ij} $a_{jk}=1$，即H的边X_i与X_k有交点e_j，即G里应有边〔x_i，x_k〕，亦即$G=L(H)$。

（证毕）

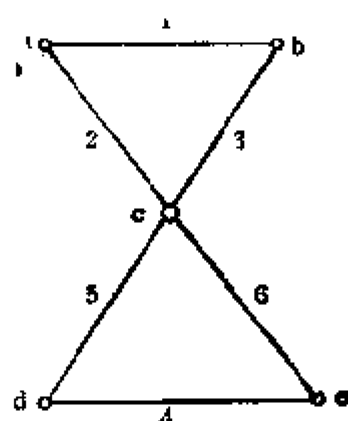


图 14.4 （一）

由以上定理的证，可知一个超图H，仅有一个代表图，$G=L(H)$。反过来，一个单纯图$G=(X, E)$可能是多个超图H的代表图，譬如图14.4

$G=(X, E)$，其中

$X=\{a,b,c,d,e\}$，

$E=\{[ab], [a,c], [b,c], [d,e][d,c], [e,c]\}$，

它的顶边结合矩阵是

	a	b	c	d	[illegible]
1	1	1	0	0	0
2	1	0	1	0	0
3	0	1	1	0	0
4	0	0	0	1	1
5	0	0	1	1	[illegible]
6	0	0	1	0	1

由于我们只考虑相邻的关系，1,2,3行可以合并，4,5,6行

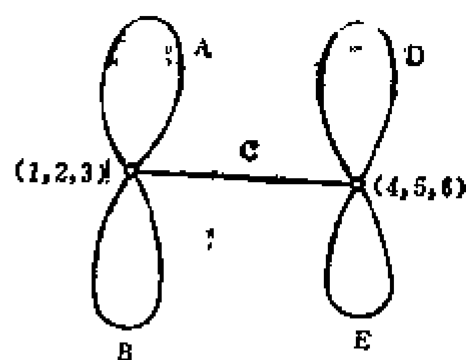


图 14.4 （二）
超图H_1，阶=2

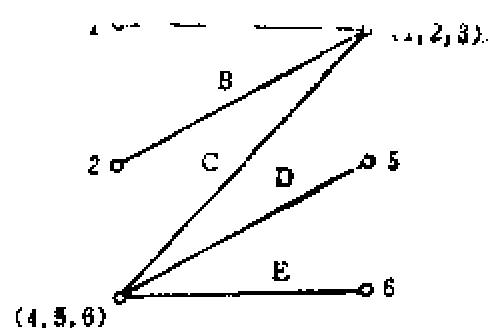


图14.4 （三）
H_2，阶=6

可以合并，将a,b,c,d,e看成5条边，可得一个取G为代表图的超图H_1。很明显，这个超图，它的代表图是图G。

若将1、2合并到3，5、6合并到4，便有图(三)。若将每一点看成一个独立的点，可得图（四）。图(三)的超图H_2，

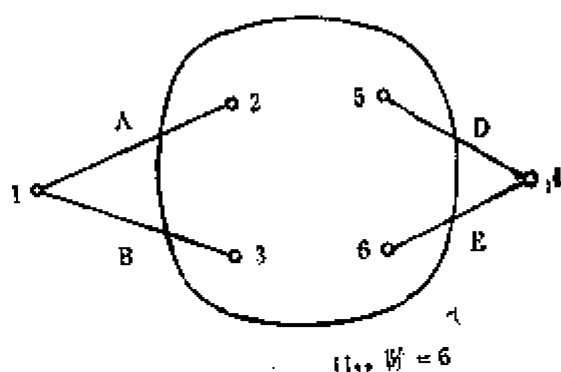
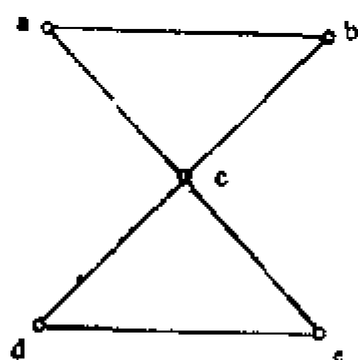
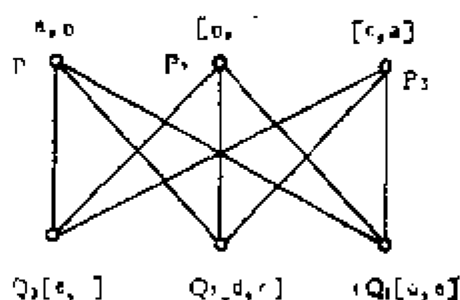


图 14.4（四）
H_3阶＝6

其阶为6，图（四）的超图H_3，其阶也是6。由此知已给的单纯图G是三个超图H_1，H_2，H_3的代表图，它们的阶分别是2，6，6。既然一个单纯图G可是多个超图的代表图，在这些图中，总有一个，它的阶最小。设记这个极小阶为$\Omega(G)$，这个$\Omega(G)$是否可以预知呢？为此，先定义一个与图G相关的图$\overline{G}$。已知图$G=(X,E)$，无孤立点，将G中每条边，代以一顶，设$\overline{G}$里的二顶是G里的二边〔a，b〕与〔x，y〕，则此二顶联边，当且仅当〔a,b,x,y〕在图G里，不构成一个集团。譬如仍取图14.4中的（一）做为G，在图G中，$\{P_1, P_2, P_3\}$与$\{Q_1, Q_2, Q_3\}$各构成稳固集，将$\overline{G}$的顶着色，显见$\gamma(\overline{G})=2$，同时$\Omega(G)=2$，故$\Omega(G)=\gamma(G)$，这个事实，实际上是一个普遍真理。





（一）G　　　　（二）$\overline{G}$

图 14.5

定理14.4 已给图$G=(X, E)$，其中$X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，无孤立点，将图G的边〔a,b〕作为顶，当且仅当二边〔a,b〕、〔x,y〕的顶集〔a,b,x,y〕在G里不构成一个集团时，联此二顶，得图$\overline{G}$。则取G为代表图的超图，其极小阶$\Omega(G)=$图$\overline{G}$的色数$\gamma(\overline{G})$。

证 设图G的色数为$\gamma(G)$。设其第i种颜色所涂染的顶集为$\overline{S_i}$，$\overline{S_i}$应是一个稳固集。设G的边〔a,b〕$\in\overline{S_i}$，$\overline{S_i}$中含G的若干顶与若干边，当边〔a,b〕$\in S_i$，顶a将是$\overline{S_i}$中一个顶，或与S_i中每一顶相邻。故S_i中$\overline{G}$的顶构成G的一个集团E_i，则如上由$\overline{S_i}$所定义的G的顶点的集团，共有q个：〔$E_1, E_2, \cdots, E_q$〕。超图$H^*=$〔$X; E_1, E_2, \cdots, E_q$〕具下性质：

（1）G的每一顶和每一边，均至少被一个E_i所复盖，故自定理14.1作超图$H=(E, X)$，则G将是超图H的代表图，这个超图H是E q阶的，于是

$$\Omega(G)\leqslant q=\gamma(\overline{G})。$$

以下往证$\gamma(G)\leqslant\Omega(G)$。

设已给超图$H=(E; X_1, X_2, \cdots, X_n)$其阶为$|E|=q=\Omega(G)$，$G=L(H)$，往证G将有q-着色（$\overline{S_1}$，$\overline{S_2}$，…，$\overline{S_q}$）。命H的顶恰属于k条边的成一集合，记为$A^k$，则

$$|E|=|A^1|+|A^2|+\cdots+|A^k|,$$

每一顶$e\in A^1$，记相应的1—集团为$\{X_{i(e)}\}$，记与此相应的G的顶的1—集团为$\{x_{i(e)}\}$，每一顶$e\in A^2$恰属于两个集合$X_{i(e)}$与$X_{j(e)}$，记与此相应的G的2—集团为$\{x_{i(e)}, x_{j(e)}\}$，每一顶$e\in A^3$的，记与其相应的G的3—集团为$\{x_{i(e)}, x_{j(e)}, x_{k(e)}\}$等等。因H的阶极小，故$A^1=\varnothing$，于是在图G里便定义了q个集团（$E_1, E_2, \cdots, E_q$），G的每一边〔$x_i$，$x_j$〕至少将被这些集团的一个所复盖，命$S_1$表示G的边含在集团$E_1$中的边集；$\overline{S}_2$表示含在集团$E_2$中但不含在$E_1$

中的边集。$\overline{S_3}$表示含在集团E_3但不含在E_1或E_2中的边集，则集族（$\overline{S_1}$，$\overline{S_2}$，…，$\overline{S_q}$）将表示G的顶点的一个q-着色，故$\gamma(\overline{G})\leqslant q=\Omega(G)$。

综合以上两者，乃知$\Omega(G)=\gamma(\overline{G})$。

（证毕）

推理14.4：设G是一个单纯图，无孤立顶，也无三角形，但具m边，则以G为代表图的超图H，其极小阶$\Omega(G)=m$。

证 图$\overline{G}$共含m个顶，由于图G无3或3个以上的顶成一集团，故$\overline{G}$的每二顶都应相邻，成一K_m，其着色数$\gamma(\overline{G})=m$。

（证毕）

§4 超图的并列集

已给超图$H=(X,\mathscr{E})$，设边的集合$\mathscr{C}\subset\mathscr{E}$，其中无二边相邻，则这个边集$\mathscr{C}$，叫做超图$H$的**并列集**（这和一般图$G=(X,E)$的并列集的概念是一致的）。可能有并列集，含最多的边数，称为**极大并列集**。已给并列集$\mathscr{C}_0$，在什么条件下这个并列集达到极大呢?即在什么条件下，恒有$|\mathscr{C}_0|\geqslant|\mathscr{C}|$对一切并列集$\mathscr{C}$均成立?

和第十章一样，先作一个边的交错序列

$$\sigma=(F_1,E_1,F_2,E_2,\cdots,F_i,\cdots),$$

其中 $F_i\in\mathscr{F}=\mathscr{E}-\mathscr{C}_0$，$E_i\in\mathscr{C}_0$

满足下列条件：

（1）$F_1\in\mathscr{F}=\mathscr{E}-\mathscr{C}_0$，$F_1$是任选的。

（2）设已有奇交错序列$\sigma_i=(F_1,E_1,F_2,E_2,\cdots,F_i)$，选取$E_i$，使

$$(a)\ E_i\in\mathscr{C}_0-\sigma_i\ ,\ (b)\ E_i\cap\bigcup_{j\leqslant i}F_j\neq\varnothing。$$

取此E_i，以扩大交错列σ_i。

（3）设已有偶交错序列

σ （$F_1, E_1, F_2, E_2, \cdots, F_i, E_i$），

选F_{i+1}，使

（a）$F_{i+1} \in \mathscr{F} - \{F_1, F_2, \cdots, F_i\}$

（b）$F_{i+1} \cap \bigcup_{j \leq i} E_j \neq \varnothing$

（c）$F_{i+1} \cap \bigcup_{j \leq i} F_j = \varnothing$

用F_{i+1}来扩大交错列σ。

视σ里所含元素的个数是奇数或偶数，分别称这个交错列是**奇的**或**偶的**。设不能再有满足（2）或（3）的E_i与F_i选进σ，即已不能再按上述规律将σ加以扩大，则这个交错列称为是**极大的**，和第十章一样，同样有下

定理14.5 在超图$H=(X, \mathscr{E})$里，并列集$\mathscr{E}_0$是极大的，其充分和必要条件是不存在关于$\mathscr{E}_0$的极大奇交错列。

证 作超图H的代表图$G=L(H)$，则超图H的极大并列集$\mathscr{E}_1$，在G里对应于G的一个极大稳固集，于是这个定理，便转化为一个平常的图G里，极大稳固集所应满足的条件。证见定理11.2。

（证毕）

于此可注意的是，若超图H是一个一般的图，则一个极大奇交错列，实际是一个极大镶边链，于是，这个定理，实际也就是定理10.1。

§5 超镶的径集

已给超图$H=(X, \mathscr{E})$，取顶集$T \subset X$，设T满足条件

$T \cap E_i \neq \varnothing$ （对一切$i \in I$均成立）

则T称为超图H的**径集**，径集的意义，实际上是一部份顶构成的集合，其中至少包含每条边的一个点。当然在所有的径集中，有一个其维极小，这个极小的数，称为超图H的**极集**

数，记作

$$\tau(H)=\min|T|。$$

很多组合问题与径集数的计算有关。

例1 设$G=(X,E)$是一个单纯图，设$S\subset X$，则当且仅当G的每一边最多只有一点含在S内时，S是极大稳固集。故G的每一边至少有一顶在$T=X-S$内，故T是一个径集。于是

$$\min|T|=\min|X-S|$$
$$=|X|-\max|S|$$

故稳固数的确定，便转化为径集数的确定。设T是一个径集，则$S=X-T$显是一个稳固集。因S中不可能包含同一边的2顶，即S中无二顶相邻，若T极小，则S便极大。

例2 极小吸收集。已给一个单纯图$G=(X,E)$，所谓G的吸收集，乃其顶集的一个子集：$A\subset X$，对每一顶$x\notin A$，恒有边E，取x为一个端点，其另一端点在A内，这样的顶集A称为图G的吸**收集**，维数极小的称为**极小吸收集**，极小数称为图G的吸**收数**。记作

$$\beta(G)=\min|A|。$$

已给1—图$G=(X,\Gamma)$，作超图$H=(X,\mathscr{E})$，取X为其顶集，对任一点$x\in X$，取边

$$E_x=\{x\}\cup\Gamma(x)。$$

设T是H的径集，则$T\cap E_x\neq\varnothing$，对每一x均成立。若$x\notin T$，则$\Gamma(x)\cap T\neq\varnothing$，故$T$是$G$的一个吸收集。反之，设$A$是$G$的吸收集，对任一顶$x$，或者$x\in A$，或者$x\notin A$，在后一情况，必有$\Gamma(x)\cap A\neq\varnothing$，故$A\cap E_x\neq\varnothing$，即$A$是超图$H$的径集。故1—图$G=(X,\Gamma)$极小吸收集的确定，转化为相应超图$H$极小径集的确定。

超图H极小径集的对偶问题，是极小复盖问题。所谓超图的复盖，乃其边集的一个子集，超图H每个顶至少包含在复

盖的一条边内，故复盖C的个是X：

$$\bigcup_{i \in C} E_i \quad X。$$

用$\rho(H)$记超图H的极小复盖数，作H的对偶图H^*，H^*的极小复盖，实际上是H的极小径集，故

$$\rho(H^*) = \tau(H)。$$

同样，$\rho(H) \quad \tau(H^*)$。

例3 再举一个开关函数的例，已给布尔变量$z_1, z_2, \cdots, z_m$，取值0或1，及在空间$[0,1]^m$上定义的函数$\varphi(z_1, z_2, \cdots, z_m)$（也仅取值0或1），给定运算规律。

$$z + z' = \begin{cases} 0 & \text{当} z = z' \; 0 \\ 1 & \text{在其他情况} \end{cases}$$

$$z \cdot z' = \begin{cases} 0 & \text{当} z = 0 \text{或} z' \cdot 0 \\ 1 & \text{当} z \cdot z' - 1 \end{cases}$$

$$\overline{z} - \begin{cases} 0 & \text{当} z - 1. \\ 1 & \text{当} z - 0. \end{cases}$$

现在的问题是：已给函数φ的真值表，如何将φ表示成最少个单项式之和。

z_1		0	1	1	1	0	0	1	1	1	1
z_2	-	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1
z_3	=	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
z_4	-	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1
φ	=	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

这里共有四个变量z_1, z_2, z_3, z_4，须作4 超立方体H。H共有16个顶，其面是 .

0—面：即16个顶。

1—面：$C_3^4 \cdot 2^3 \quad 32$。

2—面：$C_2^4 \cdot 2^2 - 24$

8—面：$C_1^4 \cdot 2 \quad 8$

4—面：即4 -超立方体。

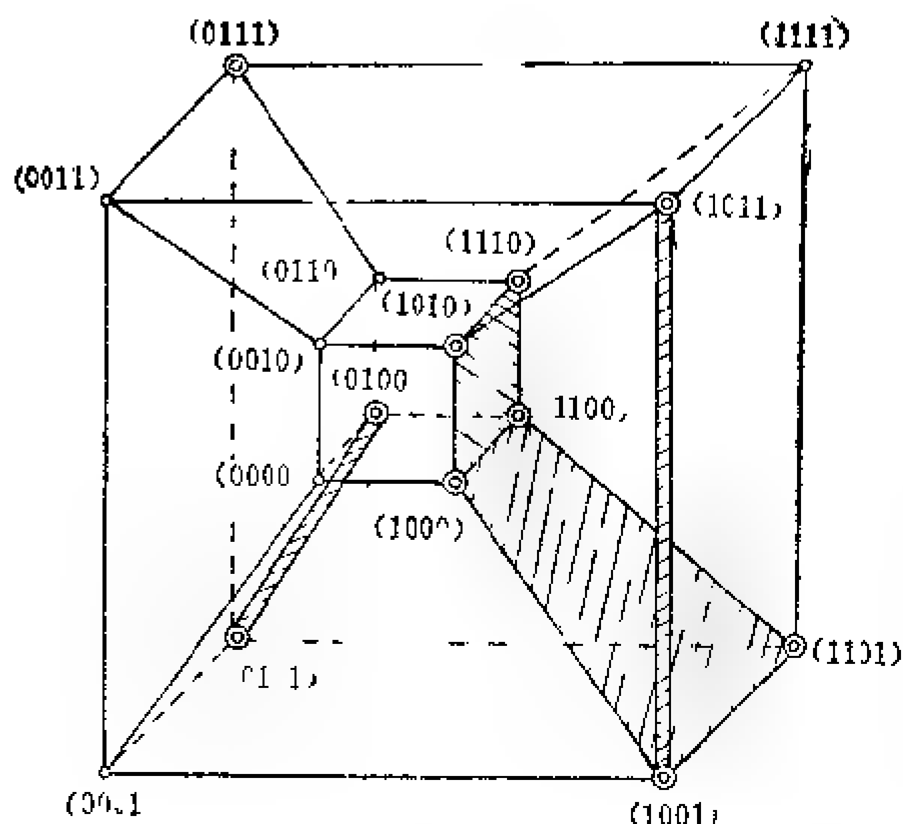


图 14 6

在这个4一超立方体中，使φ取值的共10个项，其集记为A，欲将φ化成z_i，$\overline{z}_i$等的单项式之和，便是在H里，找出若干个k—面，来复盖A，欲使φ含极少数项，便转化为求A的极小复盖，自上图，知A的一个复盖是

0—面	1—面	1—面
(0111)	(0100) (0101)	(1001) (1011)

2—面

(1001)(1101)(1100)(1000)

(1000)(1100)(1110)(1010)

在各个面中，各取一项，其坐标是1的记为z，是0的取为$\overline{z}$，于是便得

$$\varphi = z_1z_2z_3z_4 + \overline{z}_1 z_2 z_3 + z_1\overline{z}_2 z_4 + z_1\overline{z}_3 + z_1\overline{z}_4。$$

极小复盖也好，极大稳固集也好，都转化为求极小径集数，以下专门来研究超图H极小径集数的求法。

已给$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，设

$$\mathscr{A}=(A_i/i\in I),\quad \mathscr{B}=(B_j/j\in J),$$

其中　$A_i\subset X$，$B_j\subset X$。

即$\mathscr{A}$与$\mathscr{B}$是两个X的子集的集合，命

$$\mathscr{A}\vee\mathscr{B}=(A_i\cup B_j/(i,j)\in I\times J)$$

$$\mathscr{A}\wedge\mathscr{B}=(A_i\cap B_j/(i,j)\in I\times J)$$

再取符号

$\ddot{\mathscr{A}}$：$\mathscr{A}$的所有径集所成的集合，

$\mathrm{Cl}\mathscr{A}$：至少包含一个$A_i\in\mathscr{A}$的一切集的集合，

$\min\mathscr{A}$：$\mathscr{A}$的极小集所成的集合，

$\mathrm{Tr}\mathscr{A}$：$\ddot{\mathscr{A}}$的极小集所成的集合。

由以上定义，立知

$$\mathrm{Tr}\mathscr{A}=\min\ddot{\mathscr{A}},\quad \ddot{\mathscr{A}}=\mathrm{Cl}\mathrm{Tr}\mathscr{A}。$$

又由以上定义，甚易推知以下命题：

命题14.1　$\ddot{\mathscr{A}}=\mathrm{Cl}\ddot{\mathscr{A}}=(\mathrm{Cl}\ddot{\mathscr{A}})$

证　一个集包含一个径集于其内，这个集本身也是一个径集，$\mathrm{Cl}\mathscr{A}$包含$\mathscr{A}$于其内，故$(\ddot{\mathrm{Cl}\mathscr{A}})$包含$\ddot{\mathscr{A}}$。反之，$(\ddot{\mathrm{Cl}\mathscr{A}})$中每个元素都是$\mathscr{A}$的一个径集。

（证毕）

命题14.2　$\mathrm{Cl}\mathscr{A}=\mathrm{Cl}\min\mathscr{A}$

显然。

命题14.3　$(\ddot{\mathscr{A}\cup\mathscr{B}})=\ddot{\mathscr{A}}\cap\ddot{\mathscr{B}}$

显然。

命题14.4　$\min(\mathrm{Cl}\mathscr{A}\cap\mathrm{Cl}\mathscr{B})=\min(\mathscr{A}\vee\mathscr{B})$。

证　$C\in\min(\mathrm{Cl}\mathscr{A}\cap\mathrm{Cl}\mathscr{B})\Rightarrow\begin{cases}C\supset A & 某一A\in\mathscr{A}\\ C\supset B & 某一B\in\mathscr{B}\end{cases}$

$$\Rightarrow C\supset A\cup B\Rightarrow C\supset D\in\min(\mathscr{A}\vee\mathscr{B})。$$

又 $D = A' \cup B' \in \text{Cl}\mathscr{A} \cap \text{Cl}\mathscr{B}$，

故 $D \supset C' \in \min(\text{Cl}\mathscr{A} \cap \text{Cl}\mathscr{B})$，

于是 $C \supset D \supset C'$，但C极小，因有

$$C = C' = D \in \min(\mathscr{A} \vee \mathscr{B})，$$

因而 $\min(\text{Cl}\mathscr{A} \wedge \text{Cl}\mathscr{B}) \subset \min(\mathscr{A} \vee \mathscr{B})$，

同样，有 $\min(\mathscr{A} \vee \mathscr{B}) \subset \min(\text{Cl}\mathscr{A} \cap \text{Cl}\mathscr{B})$，

故命题成立。（证毕）

命题14.5 $\text{Tr}(\mathscr{A} \cup \mathscr{B}) = \min(\text{Tr}\mathscr{A} \vee \text{Tr}\mathscr{B})$。

证 继续使用命题3，1，2，4乃有

$$\begin{aligned}\text{Tr}(\mathscr{A} \cup \mathscr{B}) &= \min(\ddot{\mathscr{A} \cup \mathscr{B}}) = \min(\ddot{\mathscr{A}} \cap \ddot{\mathscr{B}}) \\ &= \min(\text{Cl}\ddot{\mathscr{A}} \cap \text{Cl}\ddot{\mathscr{B}}) \\ &= \min(\text{Cl}\text{Tr}\mathscr{A} \cap \text{Cl}\text{Tr}\mathscr{B}) \\ &= \min(\text{Tr}\mathscr{A} \vee \text{Tr}\mathscr{B})。\end{aligned}$$

（证毕）

已给 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，$\mathscr{A} = (A_i / i \in I)$，其中 $A_i \subset X$，问题是要求$\mathscr{A}$的极小径集，关键在于求出$\ddot{\mathscr{A}}$的极小集的集合$\text{Tr}\mathscr{A}$，以下给出构造$\text{Tr}\mathscr{A}$的方法。

首先，确定$\min\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$。

凡是$\mathscr{A}$的径集，必也是$\min\mathscr{A}$的径集，反之亦然。故欲寻找$\mathscr{A}$的径集，往求$\min\mathscr{A}$的径集即可。

其次，继续确定以下各集族：

$$\mathscr{A}_1 = \{A_1\} \rightarrow \text{Tr}\{A_1\} = \left\{\{a\} / a \in A_1\right\},$$

$$\mathscr{A}_2 = \mathscr{A}_1 \cup \{A_2\} \rightarrow \text{Tr}\mathscr{A}_2 = \min\left(\text{Tr}\mathscr{A}_1 \vee \text{Tr}\{A_2\}\right),$$

$$\mathscr{A}_3 = \mathscr{A}_2 \cup \{A_3\} \rightarrow \text{Tr}\mathscr{A}_3 = \min\left(\text{Tr}\mathscr{A}_2 \vee \text{Tr}\{A_3\}\right).$$

命题5保证$\text{Tr}\mathscr{A}_{i+1}$可自$\text{Tr}\mathscr{A}_i$求得，若极小$\mathscr{A}$有$k$个元

素，则上述方法，进行k步，即可以作出$Tr.\mathscr{A}$ - $Tr.\mathscr{A}_k$，这个法则求出了所有的极小径集，若问题太大，或仅需要一个径集，其维小于某个固定的数，则运算可以改变。读者如有兴趣，可参看：

（1）E.L.Lawler, Covering problems: Duality Relations and a new method of solution, SIAm J. Appl. Math 14(1966), No. 5.

（2）B.Ray: Algébre moderne et theorie des Graphs Ⅱ, Dunod, paris, 1970, Chapt. VI. B.

已给超图H，其径集数$\tau(H)$设为已知，设H的极大并列集的维是$\nu(H)$，则$\tau(H)$与$\nu(H)$之间，存在若干简单关系。作H的代表图$G=L(H)$，H的极大并列集，在$L(H)$上对应一个极大稳固集，而稳固集的余集，是一个径集，设H的极大并列集的维是$\nu(H)$，则$L(H)$的极大稳固数也是$\nu(H)$，故

$$\nu(H)=m-\tau(L(H)),$$

根据这个公式，求极大并列集的维$\nu(H)$的问题，便转化为求极小径集的维的问题。

定理14.6 设H是一个超图，则

$$\nu(H)\leqslant\tau(H)。$$

证 设$\mathscr{E}_0$是H的一个并列集，T是一个径集，$\mathscr{E}_0$的每个子集均含有T的元素，且各不相同，故恒有

$$|T|\geqslant|\mathscr{E}_0|,$$

故 $$\min|T|\geqslant\max|\mathscr{E}_0|。$$

（证毕）

定理14.7 设H是一个具秩$r(X)=h$的超图，则

$$\tau(H)\leqslant h\nu(H)。$$

证 设$\mathscr{E}=(E_i/i\in I)$，$\mathscr{E}_0=(E_j/j\in J)\subset\mathscr{E}$，是

一个极大并列集，则$\bigcup_{j\in J}E_j$是一个径集，因若有E_k，$k\notin J$，使$E_k\bigcap_{j\in J}E_j=\varnothing$，则$\mathscr{E}_0$应可因增加$E_k$而扩大，$\mathscr{E}_0$将不是极大。故

$$\tau(H)\leqslant|\bigcup_{j\in J}E_j|\leqslant\sum_{j\in J}|E_j|\leqslant|J|\cdot r(X)$$

$$=h_1(H)。$$

（证毕）

下面将讨论所谓τ—临界图的一些性质，已知超图$H=(X;E_1,E_2,\cdots,E_m)$，设H满足条件

$$\tau(H-E_i)<\tau(H)$$

对一切$i=1,2,\cdots,m$均成立。则H称为是τ—临界的。

设H是一个h秩τ—临界超图，其$\tau(H)=k+1$，取$f(h,k)$表示含在H内的可能的最大边数，则下定理成立。

定理14.8 （Jaeger, Pavan〔1971〕）设$H=(X,\mathscr{E})$是一个h秩τ—临界超图，其$\tau(H)=k+1$，则H的边数小于或等于$\binom{h+k}{h}$，对于超图$(X,\mathscr{E})$，其$|X|=h+k$，$\mathscr{E}=\mathscr{P}_h(X)$则等号成立。

证 1．可以假定H是h秩匀称的，否则，当$|E_i|<h$，可在这样的边里增加$h-|E_i|$个辅助点。

2．据假设（H是τ—临界的）$\tau(H)>\tau(H-E_i)$，故$H-E_i$将包含一个径集，其维为k（可在极小径集T里，去掉在$T\cap E_i$中而不在其他任一边中的一点，这仍是$H-E_i$的一个径集），命F_i是这样一个径集，因$\tau(H)=k+1$，这个F_i不能是H的径集，但$F_i\cap E_j\neq\phi$，对一切$j\neq i$均成立，故$F_i\cap E_i=\phi$。

考察X的子集的有序对(A,B)，其中

$$|A|=h,\ |B|=k,\ A\cap B=\phi。$$

这是可能的，因如上所言，$|F_i|=k$，$|E_i|=h$，

$F_1 \cap E_1 = \phi$。

命这些有序对的集合为Z，再作图G，以Z为其顶点，且二顶(A, B)与(A', B')相联，当且仅当$A \cap B' = \phi$，或$A' \cap B = \phi$。

存在X的子集Y，其维数$h+k$（因$|X| \geq |E_i \cup F_i| = h+k$），对于这样的$Y$，命

$$S_Y = \{(A, B) / (A, B) \in Z, A \cup B = Y\}。$$

3．往证S_Y是G的一个稳固集，考察S_Y的任二项

$$z = (A, B) 与 z' = (A', B'),$$

有
$$A \cup B = A' \cup B' = Y,$$
$$A \cap B = A' \cap B' = \phi,$$

故　$A \cap B' \neq \phi$，或$A' \cap B \neq \phi$，故在G内，z与z'不相邻，亦即在G内，S_Y是稳固的。

4．往证S_Y是G的极大稳固集。

设ρ是X的一个全序关系，并命$C(\rho)$是Z里诸项(A, B)的一个集合，其中对每一$a \in A$，及$b \in B$合于关系$a \rho b$。

首先，$C(\rho)$是G内的一个集团，因若(A, B)与(A', B')是$C(\rho)$里二相异项，且若$A \cap B' \neq \phi$，则$A \cap B'$里一点c将满足条件

（1）$a' \rho c$对一切$a' \in A'$均成立（因$c \in B'$），

（2）$c \rho b$对一切$b \in B$均成立（因$c \in A$），

因而$A' \cap B = \phi$，因若$A' \cap B \neq \phi$，则将有元素$d \in A' \cap B$，因而$d \rho c$，$c \rho d$，因ρ是全序的，这不可能，故(A, B)与(A', B')在G内相邻，亦即$C(\rho)$内每二项均相邻，故$C(\rho)$是一个集团。

对每一Y与每一ρ，恒有

$$C(\rho) \cap S_Y \neq \phi,$$

因将Y内元素，按ρ编序，使$y_1 \rho y_2 \rho \cdots \rho y_{h+k}$，取$A = \{y_1, y_2 \cdots, y_h\}$，$B = \{y_{h+1} \cdots, y_{h+k}\}$则$(A, B) \in$

$C(\rho)$，$C(\rho)$与S_Y仅有一个公共点，在X里，设有d个不同的ρ，每个ρ定一集团$C(\rho)$，d个ρ定集团$C(\rho)$，故每一z含在d个不同的集团内，Y共有$h+k$个元素，对每一全序ρ，Y的元素有一序列方法，$y_1\rho y_2\rho\cdots\rho y_h\rho y_{h+1}\rho\cdots\rho y_{h+k}$故取$A=(y_1, y_2, \cdots, y_h)$，$B=(y_{h+1}, \cdots, y_{h+k})$，点$(A, B)$便是在全序$\rho$之下的一点，$|C(\rho)\cap S_Y|=1$，$S_Y$的每一点共属于$d$个不同的集团$C(\rho)$，故不同的集团$C(\rho)$的总数$t$是

$$t=d\cdot|S_Y|。$$

设S是一个稳固集，其每一点含在d个集团$C(\rho)$内，而S内任二点不可能含在同一个集团内，故与S相应的集团的总数是$d\cdot|S|$，但这不可能超过总数t，即应有

$$d|S|\leqslant t。$$

故$|S_Y|$极大，即S_Y是一个极大稳固集。

5．诸点(E_1, F_1)，(E_2, F_2)，…，(E_m, F_m)构成G内的一个稳固集（因$E_i\cap F_j\neq\phi$，$E_j\cap F_i\neq\phi$对一切i，j均成立），故G的稳固集$\beta(G)\geqslant m$。

但 $$\beta(G)=|S_Y|=\binom{h+k}{h}，$$

因而 $$m\leqslant\binom{h+k}{h}.$$

当$|X|=h+k$，$\mathscr{E}=\mathscr{P}_h(X)$，$m=\binom{h+k}{h}$故在上不等式中，等号成立。

（证毕）

§6 超图的着色

已给超图$H=(X, \mathscr{E})$，用多种颜色，将H的顶着色，使同一边E_i（$|E_i|>1$）上的诸点不全是同一种色，这就是所谓的超图的顶着色，所用的最少种颜色称为超图H的色数，

记作$\chi(H)$。

注：这个概念是Erdös与Hajnal提出的，超图的顶的着色，还可能有其他的规定。

设在超图H里取顶集$S\subset X$，使在S里不含任何边E_i，其中$|E_i|>1$，则S称为是稳固的。极大的稳固集S，其维$|S|$称为H的稳固数。

将超图H的顶作q个稳固集的划分，每一稳固集中的点，可染以一种颜色，则q种颜色，便是以涂染H的顶，使同一边上的顶不同色，此时称H为可—q—着色。

例 二阶的射影平面，共含$n^2+n+1=7$点与7条边，这实际上可以看做是一个超图$H=(X,\mathscr{E})$，其中顶集$X=\{a, b, c, d, e, f, g\}$，边集$\mathscr{E}=\{(abc), (adg), (aef), (fdb), (cde), (gbe)(cgf)\}$。

很明显，(a, c, d, f)，(b, e)与(g)是三个稳固集，将第一个染红，第二个染绿，第三个染黑，便得H的一个顶着色，H是可—3—着色的（见图14.7）。

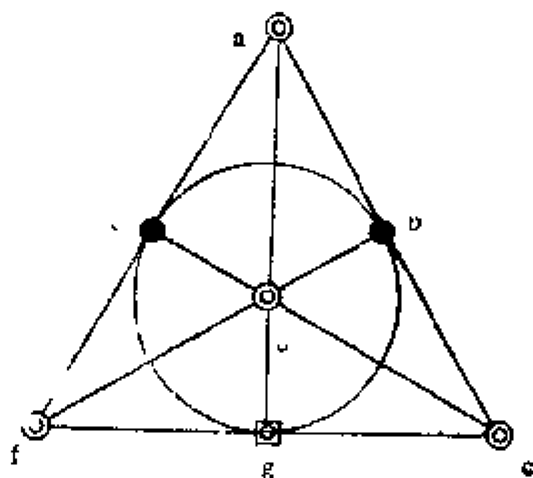


图 14.7

已给超图$H=(X,\mathscr{E})$，设$x\in X$是H的一个顶，如在这个顶上有环$\{x\}$，去掉这个环，设有多条边$\{E_j/j\in J\}$使

$E_i\cap E_j=\{x\}$，

$(i, j\in J, i\neq j)$

则这个边数称为顶x的次数，记作$d_H(x)$，若在顶x只有环$\{x\}$，则很明显，$d_H(x)=0$。像在一般的图一样，下面将给出一个定理，联系图的色数$\chi(H)$与顶的次数$d(x)$。

定理14.9 (Tomescu[1968])设$(S_1, S_2, \cdots, S_q)$①是超图H的一个q-着色，并设

$$d_k = \max_{x\in S_k} d_H(x)$$

则 $$\chi(H) \leqslant \max_{k\leq q} \min\{k, d_k+1\}$$

证 1. 首先往证存在一个r-着色$(S'_1, S'_2, \cdots, S'_r)$满足条件

$$S_k \subset \bigcup_{i=1}^{\min(k,r)} S'_i,$$

$$S'_k是X - \bigcup_{i<k} S'_i 中极大稳固集。$$

设S_1在X里不极大，可以加进若干点，使其变为极大稳固集S'_1，若$S_2 - S'_1$在$X - S'_1$里不极大，可以加进顶点，使其成为极大稳固集S'_2，如此等等，根据做法，可知S'_1，S'_2，S'_3…等无公共顶，且陆续有

$$S_1 \subset S'_1,\ S_2 \subset \bigcup_{i=1}^{2} S'_i, S_1 \cup S_2 \cup S_3 \subset S'_1 \cup S'_2 \cup S'_3, \cdots$$

最多可如此做到q次，故$r \leqslant q$，最后得H的一个r-着色。

2. 设$x \in \bigcup_{i=1}^{k} S'_i$及$j \leqslant k$，则因$S'_j$的极大性，应有边$E'_j$，使

$$E'_j \subset S'_j \cup \{x\},\quad |E'_j| > 1。$$

因$x \notin \bigcup_{i=1}^{k} S'_i$，而$j<k$，则$S'_j$中必含$E'_j - \{x\}$，$|E'_j|>1$，否则可将$x$加进$S'_j$以加大$S'_j$，这和$S'_j$的极大性相矛盾。

①所谓q-着色$(S_1, S_2, \cdots, S_q)$是(1)每个S_i是一个稳固集，(2)$\bigcup_{i\leq q} S_i = X$。

又因$S'_i \cap S'_j = \phi$对任一i，$j(i \neq j)$，$i, j < k$均成立，故$(E_i - \{x\}) \cap (E_j - \{x\}) = \phi$。

因$x \in E'_j$对一切$j \leqslant k$均成立，族E'_1，E'_2，…，E'_k满足

$$E'_i \cap E'_j = \{x\}, \quad (i \neq j, \ i、j \leqslant k),$$

故 $$d_H(x) \geqslant k。$$

3．取$i(x)$表示含x的S'_i的下标数，据2，有

$$i(x) \geqslant k+1 \Rightarrow d_H(x) \geqslant k,$$

取 $$k = i(x) - 1,$$

则 $$i(x) \leqslant d_H(x) + 1。\quad (x \in X)$$

设顶$a \in S_k$，则因$S_k \subset \bigcup_{i=1}^{\min(k,r)} S'_i$，若$k < r$，在$S'_1, S'_2, \cdots, S'_k$中将出现$a$，故$i(a) \leqslant k$。若$k > r$，$S'_1$，$S'_2$，…，$S'_r$中将出现$a$，故$i(a) \leqslant r < k$，总之有$i(a) \leqslant k$，且

$$i(a) \leqslant \max_{x \in S_k} i(x) \leqslant \max_{x \in S_k} (d_H(x) + 1) = d_k + 1。$$

综合以上二者，乃有

$$i(a) \leqslant \min(k, \ d_k + 1),$$

故 $$\max_{x \in X} i(x) \leqslant \max_k \min(k, \ d_k + 1)。$$

$\chi(H)$是可能的着色数中的最小的，$\max\limits_{x \in X} i(x)$显是某一$r$—着色中最后一个$S'$的下标，故

$$\chi(H) \leqslant \max_{x \in X} i(x),$$

或 $$\chi(H) \leqslant \max_k \min(k, \ d_k - 1)。$$

（证毕）

推理14.9。设H是一个超图，其$\chi(H) = q+1$，再设在超图H中去掉顶x_0，所得超图为H_0，其$\chi(H_0) = q$，则$d_H(x_0) \geqslant q$。

证 设$(S_1, S_2, \cdots, S_q)$是H_t的q—着色，若$d_H(x_0)<q$，则考察$(q+1)$—着色$(S_1, S_2, \cdots, S_q, \{x_0\})$，将有

$$\chi(H) \leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant q+1} \min(k, d_k+1) \leqslant q,$$

这和$\chi(H)=q+1$矛盾。

推理14.9$_b$ 设H是一个超图，q是一个正整数，满足条件

$$|\{x/x\in X, d_H(x)\geqslant q\}| \leqslant q,$$

其意是$d_H(x)\geqslant q$的顶x的个数不超过q，

则 $\chi(H)\leqslant q$。

证 编排顶点的顺序，使

$$d_H(x_1)\geqslant d_H(x_2)\geqslant\cdots\geqslant d_H(x_n),$$

对于$k>q$，有 $d_H(x_k)<q \Rightarrow d_H(x_k)+1\leqslant q$，

故 $\min(k, d_H(x_k)+1)\leqslant q$。

对于$k\leqslant q$，上不等式也成立。

作n-着色，$(\{x_1\}, \{x_2\}, \cdots \{x_n\})$，据定理14.1，乃有

$$\chi(H)\leqslant \max_{k\leqslant n} \min\{k, d_k+1\}\leqslant q。$$

推理14.9$_c$ 设H是一个超图，其顶点的极大次是d_0，

则 $\chi(H)\leqslant d_0+1$。

证 据推理14.9$_b$，取$q=d_0+1$，显见

$$|\{x/x\in X, d_H(x)\geqslant d_0+1\}|=0\leqslant d_0+1,$$

故 $\chi(H)\leqslant d_0+1$。

（证毕）

这个定理，和一般图里的Brooks定理相类似。

推理14.9$_d$ （Motzkin〔1968〕）设G是一个单纯图，其极大次是h，则可用$\left[\frac{h}{2}\right]+1$种颜色，将其顶点染色，使没有一个圈里的顶点具同一种颜色。

证 作超图$H=(X,\mathscr{E})$取图G里的顶集X为其顶集，取G里所有的圈为其边，就G而言，过最高次顶最多有$\left[\frac{h}{2}\right]$个圈，故超图H的极大次不超过$\left[\frac{h}{2}\right]$，据推理14.9c，有

$$\chi(H)\leqslant\left[\frac{h}{2}\right]+1$$

利用推理14.9c，还可以推得下

推理14.9 已给单纯图$G=(X,E)$，若

$$q=\max_{[a,b]\in E}\min\left[d_G(a),\ d_G(b)\right],$$

则其边可以q—着色，使每个圈上的边不具同一种颜色。

证 作超图H，其顶是G里至少属于一个圈的边，其边是每个圈上的边，由于穿过a而以$[a,b]$为一边的圈，最多只能有$d_G(a)-1$个，穿过b，而以$[a,b]$为一边的圈，最多也只有$d_G(b)-1$个，故在这个超图里，

$$d_H[a,b]\leqslant\min\left[d_G(a)-1,\ d_G(b)-1\right]\leqslant q-1,$$

据推理14.9c，乃有

$$\chi(H)\leqslant q。$$

（证毕）

§7 超圈的集团

已给超图$H=(X,\mathscr{E})$，设H是h秩的，取$r<h$，在X里任取子集$A\subset X$，或者$|A|<r$，或者$|A|\geqslant r$。在后一情况，在A中任取r个相异元素，这r个元素，至少恒在H的一条边内，则A称为超图H的r**秩集团**。r秩集团的任一子集，仍是r秩集团。在一般图$G(X,E)$里，所谓集团，实际上就是2—秩集团。在H里，在所有的r秩集团里可能有一个其维最大，其极大维记为$\omega(H)$。

由于设$r<h$，任一边E_i，其维$|E_i|=h$，则该边是一个r秩集团，因在这个集团里，任取r个点，总有边（譬如E_i本身）含此r个点，故

$$\omega_r(H)\geqslant|E_i|=h。$$

设超图H的顶集X本身就是一个r秩集团（即在H里任取r个点，恒有边含此r点），则H称为是**r秩完备的**。

设超图H是h秩匀称的一个h秩集团，简称为一个**集团**。这实际上是一般图G里集团概念的扩大。在H里，点数少于h的任一集合，因在其中不可能有h个不同的点，故也就谈不上h点在一条边上，这样的集合，称为无意义的集团。

定理14.10 设H是一单纯的h秩匀称的超图，再设K是一个具k顶的集团，$k\geqslant h$，则K的每一顶，其次数是

$$d_0=\left[\frac{k-1}{h-1}\right],$$

且由K产生的子一超图H_K，其着色数

$$\chi(H_K)=d_0+1。$$

证 1．顶$x\in K$，其次数乃K的子集的极大个数，这些子集具$h-1$个元素，不含x，两两互质，故

$$d_0=\left[\frac{k-1}{h-1}\right]。$$

2．H_K的一个极小的q-着色

$$(S_1,S_2,\cdots,S_q),$$

其中 $|S_i|=h-1,\quad(i=1,2,\cdots,q-1)$

$|S_q|\leqslant h-1,$

故 $\chi(H_K)=\left[\frac{k}{h-1}\right]^*$

但 $d_0=\left[\frac{k-1}{h-1}\right]\Rightarrow d_0(h-1)+R=k-1\ (0\leqslant R<h-1)$

$$\Rightarrow d_0(h-1)+1+R=k$$

$$\Rightarrow \frac{d_0(h \quad 1)+1}{h \quad 1} + \frac{R}{h \quad 1} \cdot \frac{k}{h \quad 1}。$$

故 $\quad \chi(H_K) \quad \left[\frac{R}{h \quad 1}\right]^* \cdot \left[\frac{d_c(h-1)+1}{h-1}\right]^* \quad d_0+1$。

但据上节推理14.9c，有

$$\chi(H_K) \leqslant d_0+1,$$

故 $\quad \chi(H_K)=d_0+1$。

（证毕）

这个定理表明由上节推理14.9c所给出的上界是可能最好的，即设超图H是h秩匀称的，极大次是d_0，则$\chi(H)\leqslant d_0+1$，在H中包含顶点的次数是d_0的集团K，其所派生的超图是H_K，对于H_K则等号成立。即 $\chi(H_K)$ d_0+1。但若$\chi(H)=d_0+1$，则不一定能导致这样一个集团的存在，如L. Lovasz所构造的下图14.8。

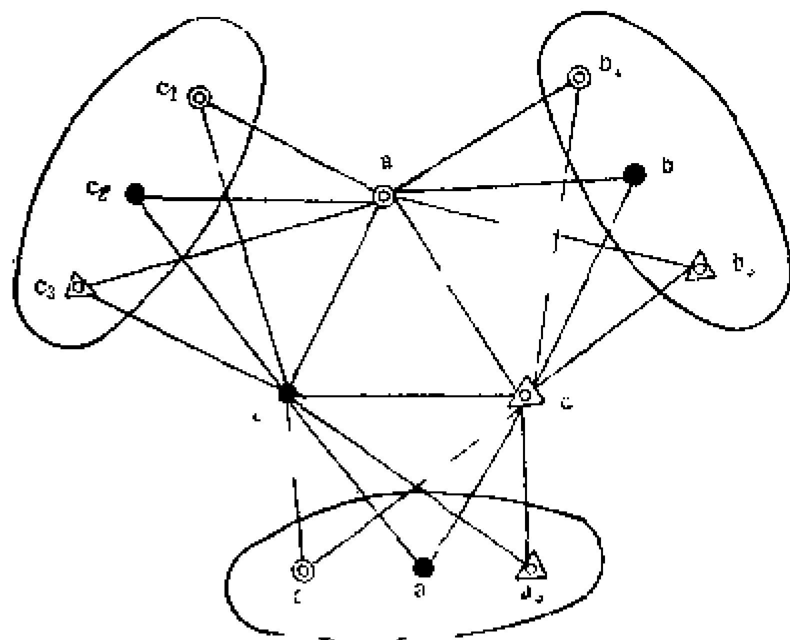


图 14.8

超图H $(X, \mathscr{E})$，

X $\{a, b, c, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3\}$，

$\mathscr{E}$ {abc , abc_2, abc , $c\ c_2c$, acb , acb_2 ,

acb_3, $b_1b_2b_3$, bca_1, bca_2, bca_3, $a_1a_2a_3$ }。

这个超图是3—秩匀称的，极大次是8，仅含有次数$d_0 = 2$的，顶，其着色数是

$$\chi(H)\quad 3\quad d_0+1,$$

其着色分别是（a, c , b , a ），（b, c_2, b_2, a_2 ），（c, c , b_3, a_3 ），但H不含次数为2的集团。H里，次数为2的顶集是{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 }，但这不成一个集团。

§8 平衡超图

这一节将往研究平衡超图。

已给超图H （X, $\mathscr{E}$ ），设其每一奇圈

$$\mu = (x_1E_1x_2E_2\cdots x_{2p+1}E_{2p+1},\ x_1)$$

上总有边，含圈上的三个顶，则这样的**超图**，叫做**平衡超图**。奇圈也称是平衡的。平衡超图显有以下特性：

1．平衡超图的任一部份超图H'仍是平衡的。

证 设这个命题不成立，在H'里将存在奇圈μ，其上没有边含圈上的三个顶，但这个奇圈也是原图H的一个奇圈，于是H是不平衡的，这是矛盾。

（证毕）

2．平衡超图的任一子超图H'也是平衡的。

证 设H'不平衡，在H'里将有奇圈

$$\mu\quad (x_1'E_1'x_2'E_2',\ \cdots x'_{2p+1}E'_{2p+1}x_1'),$$

其上没有边含圈上三个顶点，但这个圈在H里对应于一个奇圈也不平衡，这是矛盾。

3．H （$E_i/i\in I$ ）是一个平衡超图，E_0是一个集合，则超图（$E_i\cup E_0/i\in I$ ）也是平衡的。

证 设命题不成立，H'将有奇圈

$$\mu \quad (x_1'E_1'x_2'E_2'\cdots x_{2p+1}'E_{2p+1}'x_1'),$$
没有边含其上三点，但其中至少将有一点$x_i' \in E_i \subset E'$，否则这个圈将是H里一个奇圈，这是矛盾。取边E_j'，$j \neq i$，$i-1$，则E_j'将含三点，x_i'，x_j'，x_{j+1}'，这和μ的确定相矛盾。

（证毕）

4．设$H=(E_i/i\in I)$是平衡的，$x_0 \notin \bigcup_{i\in I} E_i$，则超图

$$H'=(E_1\cup\{x_0\},\ E_2,\ \cdots,\ E_m)$$
也是平衡的。

证 在超图H'中，由于x_0只属于$E_1'=E_1\cup\{x_0\}$，而不属于其他任何边，H'中任一奇圈μ中将不能出现顶点x_0，奇圈μ总是可变为H里一个奇圈，应是平衡的。

（证毕）

5．设超图$H=(X,\mathscr{E})$是平衡的，$x_k\in X$，对H增加一个新点x_k'如下，得超图$H'=(X',\mathscr{E}')$，其中

$$X'=X\cup\{x_k'\},$$

$$E_i'=\begin{cases}E_i & 若x_k\notin E_i,\\ E_i\cup\{x_k'\} & 若x_k\in E_i。\end{cases}$$

则H'是平衡的。

证 设H'中的一个奇圈是

$$\mu=(x_1'E_1'x_2'E_2'\cdots x_{2p+1}'E_{2p+1}'x_1'),$$

（1）μ不含x_k'，则μ是H的一个奇圈，自是平衡的。

（2）若μ含x_k'，同时也含x_k，在奇圈μ中，应有$x_k'E_k'x_{k+1}'$，故边E_k'含三顶x_k'，x_k，x_{k+1}'，故μ是平衡的。

（3）若μ含x_k'但不含x_k，可将x_k'换成x_k，μ变成H里的奇圈，应有边含其上三顶，还原成μ，μ里有边含圈上三顶，故μ是平衡的。

（证毕）

6．设$H=(X,\mathscr{E})$是平衡的，则其对偶图$H^*=(e_1,$

$\cdots, e_{.s}$ $X_1, \cdots, X_n$）也是平衡的。

证 据对偶图的定义，有 X_j （$e_i/i \leqslant m, x_j \in E_i$）

设 $\mu^* = (e_1 X_1 e_2 X_2 \cdots X_{2p+1} e)$ 是 H^* 的一个奇圈，其在 H （H^*）* 里的对偶图

$$\mu \quad (E_1 x_1 E_2 x_2 \cdots x_{2p+1} E_1)$$

是奇的，故在 H 里，相应地有奇圈

$$\mu = (x_1 E_2 x_2 E_3 \cdots x_{2p+} E_1 x_1)$$

应具平衡性，故 μ^* 在 H^* 里具平衡性。

（证毕）

7．设超图 $H = (E_i/i \in I)$ 是平衡的，並设在部份超图

$$H' \quad (E_i/i \in J, J \subset I)$$

内，若 $i, j \in J \Rightarrow E_i \cap E_j \neq \phi$，

则 $\bigcap_{i \in J} E_i \neq \phi$。

证 本命题的证明用归纳方法。本命题对于含两边的任一部份超图，均能成立。设命题对于少于 p 边的部份超图均成立，往证命题对于含 p 边的超图也必成立。

据归纳假设，对每一 $k < p$，恒有点 a_k，满足条件

$$a_k \in \bigcap_{i \neq k} E_i,$$

若 a_k 等不相异，则已有 $a_k \in \bigcap_{i \in J} E_i$，命题已证。

若 a_k 相异，可考察序列

$$(a_1 E_2' a_3 E_1' a_2 E_3' a_1),$$

其中 $a_1 \in E_2' \cap E_3$， $a_2 \in E_3' \cap E_1'$，$a_3 \in E_1' \cap E_2'$。若其中有两个 E' 相同，譬如 $E_1' = E_2'$，则 $a_1 \in \bigcap_{i \in J} E'$，命题已证。

若 E_1'、E_2'、E_3' 均相异，则 μ 成一奇圈，由于 H 的平衡性，μ 将有边，含其上三点，故

$$a_1 \in \bigcap_{i \in J} E_i。$$

（证毕）

8．平衡超图是保形的。

证　H平衡$\Rightarrow H^*$平衡$\Rightarrow H^*$满足赫莱条件$\Rightarrow H$保形（见习题1）。

定理14.11　超图$H=(X,\mathscr{E})$是平衡的，其充分和必要条件是对每一$S\subset X$，子超图H_S是可-2着色的。

证　充分性　设H不平衡，则在H里有奇圈

$\mu(a_1E_1a_2E_2\cdots E_{2p+1}a_1)$，

没有边含其上三顶，取$S=(a_1, a_2,\cdots,a_{2p+1})$，构成子超图$H_S$，则$\chi(H_S)>2$，这是矛盾。

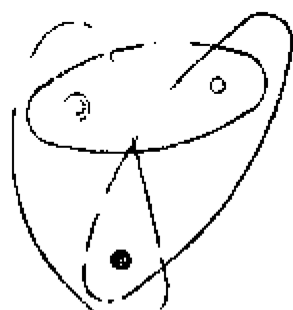


图　14.9

必要性　设H是不可—2着色的平衡超图，命这类超图的最低阶是$n=|X|$，往证这将导致矛盾。

（i）设$x_0\in X$是超图上任一顶，往证x_0将至少属于两条不同的边，这些边恰含两个元素（恰含两点）。

用$S=X-\{x_0\}$构成子超图H_S，据上特性2，H_S是平衡的，其阶是$n-1<n$故H_S可-2着色，设其一个2-着色是(S_1^0, S_2^0)，若x_0不属于仅含两点的边，则x_0可染以两种颜色中的一种，设x_0与S_2^0中的点同色，则H有2—着色$(S_1^0, S_2^0\cup\{x_0\})$，这是矛盾。

（ii）若x_0只含在一个两点的边上，由于H_S的可-2着色，含x_0的边的另一端点必属于两种颜色中的一种，设它$\in S_2^0$，则$(S_1^0\cup\{x_0\}, S_2^0)$是$H$的一个2-着色，这是矛盾。

故x_0至少应含在两条边内，这些边恰含两点，设为$[x_0, y]$与$[x_0, z]$ $(y\neq z)$。

命$\mathscr{G}$表示H里恰含两点的边族，则图$G=(X,\mathscr{G})$是平衡的，故G是两分的，考察G的一个联接的分子图C，因$|G|=$

$n\geqslant 3$，故在C里存在一顶x_1不是断点，命$S=(X-\{x_1\})$，则子图H_S是$n-1$阶的，故H_S是可—2着色的，命（S_1^0，S_2^0）是其2—着色，在G内与x_1相邻的点应具同一种颜色，设其为S_1^0，故$x_1\in S_2^0$，于是（S_1^0，$\{x_1\}\cup S_2^0$）是H的一个2—着色，这是矛盾。

故若H是平衡的，H必可2—着色。

（证毕）

定理14.12 设超图$H=(E_i/i\in I)$平衡，並设$k=\min\limits_{i\in I}|E_i|$，则存在$k$个径集分划$X$。

证 命（S_1，S_2，…，S_k）是X的一个k组的分划，取$k(i)$代表边E_i与S_i等相交的个数，若$k(i)=k$对每一i均成立，则每个S_i与每条边E均相交，每个组S_i便是一个径集，定理已证。

设对某一j，有$k(j)<k$，则在k个组S_i中，必有S_q不与E_j相交，即$S_q\cap E_j=\phi$，但因$|E_j|\geqslant k$，在分划中，必有S_p，其$|S_p\cap E_j|\geqslant 2$，作$S_p\cup S_q=S$，子图H_S是可—2—着色的，命其2—着色是$(S_p'，S_q')$，由于H_S是2—着色的，$E_j\cap S_q$的两个（至少）点，同在E_j内的，必分属S_p'与S_q'。作新的分划如次，当$l\neq p$、q，取$S_l'=S_l$，当$l=p$或q，取S_l'与S_q'为分划中的两个组，对于新分划（S_1'，S_2'，…，S_k'）将有

$$k'(i)\geqslant k(i),\qquad (i\neq j)$$

$$k'(j)=k(j)+1。$$

继续如此改进分划，最后必将得一分划（$\overline{S_1}$，$\overline{S_2}$，…，$\overline{S_k}$）对每一i，有

$$\overline{k}(i)=k。$$

故分划中每一个组$\overline{S}$是一个径集。

（证毕）

推理14.12$_1$ 设超图$H=(X,\mathscr{E})$是平衡的，设其顶的

最低次是k，则H的边集可做分划（$F_1, F_2, \cdots, F_k$），使每一F_i都是一个复盖。

证 设H是平衡的，故H^*也是平衡的。H^*的一边是X_i，设$k=\min|X_i|$（这就是H的最低次），则据定理14.12，X将有划分（$\overline{S}_1$，$\overline{S}_2$，$\cdots$，$\overline{S}_k$），其中每一$\overline{S}_j$是一个径集，通过对偶，回到原图H上，便得本推理。

（证毕）

为了以后讨论问题的需要，我们先在此再引入几个有关概念及命题。

设$H=(X, \mathscr{E})$为一超图，其秩函数为$r(S)$，一个集合S如果具有性质：$r(S)=1$即对$1\leqslant i\leqslant m$均有$|S\cap E_i|\leqslant 1$成立，则称S为强稳固的。自然，强稳固集也是一个稳固集，但反之则不一定。

超图H的强稳固数$\alpha(H)$定义为强稳固集所可能具有的极大顶点数。超图H的复盖数$\rho(H)$定义为可复盖H的所有顶点的最少边数。

超图H的强q—着色定义为H的顶点的一个q－着色，它使得含于同一边的任二顶点均有不同的色。显然，任一个强q—着色均是其顶集X的一个划分为q－个强稳固集的划分。H的强色数$\gamma(H)$是使得对H进行强q－着色成为可能的最小正整数q。

关于强稳固数$\alpha(H)$及复盖数$\rho(H)$有下述：

定理14.13 设$H=(X, \mathscr{E})$为一超图，其秩函数为$r(A)$，则
$$\alpha(H)\leqslant\max_{\substack{A\neq\phi\\ A\subset X}}\left[\frac{|A|}{r(A)}\right]^*\leqslant\rho(H)。$$

证 设S为一个极大强稳固集，于是$r(S)=1$，

因而
$$\alpha(H)=|S|=\left[\frac{|S|}{r(S)}\right]^*\leqslant\max_{\substack{A\neq\phi\\ A\subset X}}\left[\frac{|A|}{r(A)}\right]^*。$$

又设复盖X至少需要k边，比如这些边是E_1，E_2，…，E_k，于是：

$$|A| \leq |A\cap E_1| + \cdots + |A\cap E_k| \leq kr(A),$$

因而 $kr(A) - |A| \geqslant 0 \quad (A\subset X)$，

$$k \geqslant \frac{|A|}{r(A)} \quad (A\subset X,\ A \neq \phi),$$

故得 $\rho(H) = k \geqslant \max\limits_{\substack{A\neq\phi \\ A\subset X}} \left\{ \frac{|A|}{r(A)} \right\}^*$。

定理14.14 超图H是平衡的，当且仅当$\gamma(H') = r(H')$对H的每一部分子图H'均成立。

证 设H是一个超图，H'是其一个部份子图，等式

$\gamma(H') = r(H')$

成立，往证H是平衡的。

若H不平衡，则存在不平衡的奇圈

$\mu = (a_1E_1a_2E_2\cdots E_{2p+1}a_1)$，

取$S = \{a_1, a_2, \cdots, a_{2p+1}\}$，定义部份子图$H' = (S, \mathscr{E}')$，其中$\mathscr{E}' = \{E_1\cap S, E_2\cap S, \cdots, E_{2p+1}\cap S\}$，$H'$将是一个奇圈，没有边含其上三点，故$\gamma(H') = 3$，$r(H') = 2$，因而 $\gamma(H') \neq r(H')$，这是矛盾。

2．设H是平衡的，其秩为h，由于h的极大性，将一个含点最多的边上的顶染色，至少须h种不同的颜色，故$\gamma(H)\geqslant h$。

又由于$r(H) = h$的极大性，自每一边E_i，作A_i，使$|A_i| = h - |E_i|$，然后取点集

$$X' = X\bigcup_{i\in I} A_i,\ \mathscr{E}' = \{E_i \cup A_i / i\in I\}。$$

超图 $H' = (X', \mathscr{E}')$将是h秩匀称的，据基本性质4知H'是平衡的，据定理14.12将存在X'的一个分划

$(T_1', T_2', \cdots, T_h')$，

其中每个点组T_j'是一个径集，由于H'是h秩匀称的，故

$|T_j' \cap E_i'| \leqslant 1$ 对每一i与每一j均成立，每一T_j'是一个强稳固集，于是

$$T_j' \cap X = S_j \qquad (j=1, 2, \cdots, h),$$

便是H的一个强h—着色的组，故$\gamma(H)=r(H)$。

（证毕）

推理14.14 设H是h秩的平衡超图，若$h=h_1+h_2$，则存在X的一个分划，$X=(X_1, X_2)$使$r(X_1)=h_1$，$r(X_2)=h_2$。

证 由于H是强h—着色的，命$(S_1, S_2, \cdots, S_h)$是一个强h—着色，且命

$$X_1=\bigcup_{1\leq i\leq h_1} S_i,\ X_2=\bigcup_{h_1+1\leq i\leq h_2} S_i,$$

则 $\quad r(X_1)=h_1,\ r(X_2)=h_2$。

（证毕）

定理14.15 （Berge, Las Vergnas〔1970〕）设$H=(X, \mathscr{E})$是一个超图，命$\nu(H)$是其极大并列集的维，$\tau(H)$是其极小径集的维，则H是平衡的，当且仅当

$$\nu(H')=\tau(H')$$

对H的每一部份子超图H'均成立。

证 充分性 设对每一部份子超图H'，有$\nu(H')=\tau(H')$，往证H是平衡的。设H不平衡，则存在不平衡的奇圈

$$\mu=(a_1E_1a_2E_2\cdots E_{2p+1}a_1),$$

取 $\quad S=\{a_1, a_2, \cdots, a_{2p+1}\}$，作$\alpha$图$H'=H_S$，$H'$是

$$(E_i \cap S/i\in I),$$

H'含奇圈 $\quad \mu'=(a_1E_1'a_2E_2'\cdots\cdots E_{2p+1}'a_1)$，

其并列集的极大推 $\quad \nu(H')=\left[\frac{|H'|}{2}\right]$，径集的极小维

是 $\quad \tau(H')>\left[\frac{|H'|}{2}\right]$，

于是 $\nu(H') \neq \tau(H)$，这是矛盾。

必要性 设H是平衡的，往证$\nu(H') = \tau(H')$。

设 $\nu(H') = \tau(H')$不成立，命$H = (E_i / i \in I)$是一个这样的超图，其$\sum_{i \in I} |E_i|$达到极小，设在这个超图里$\nu(H) < \tau(H)$，命$\nu(H) = q$，则$\tau(H) > q$，往证将导致矛盾。

1．$E_i \not\subset E_j$ $(i \neq j)$。若有$E_i \subset E_j$，则由H的定义有

$$\nu(H) = \nu(H - E_j) = \tau(H - E_j) = \tau(H),$$

这是矛盾。

2．$|E_i| \geqslant 2$，$(i \in I)$

因若$E_1 = \{x_1\}$，则由1，$x_1 \notin \bigcup_{i > 1} E_i$，故

$$\nu(H) = \nu(H_{X - \{x_1\}}) + 1 = \tau(H_{X - \{x_1\}}) + 1 = \tau(H)$$

这是矛盾。

3．设$\mathscr{E}_0 = (E_j / j \in J)$是$H$的极大并列集，则这些边分划$H$的顶集$X$，即

$$X = \bigcup_{j \in J} E_j,$$

设有点$a \notin \bigcup_{j \in J} E_j$，命$E_i' = E_i - \{a\}$，则超图

$H' = (E_i' / i \in I)$是平衡的，据本证明的基本假设，应有

$$\nu(H') = \tau(H') \geqslant \tau(H) > q,$$

故并列集$\mathscr{E}_0' = (E_j' / j \in J)$在$H'$里不极大，则存在关于$\mathscr{E}_0'$的奇交错列

$$\sigma' = (F_1', E_1', F_2', E_2' \cdots E_p', F_{p+1}'),$$

其中 $E_1', E_2', \cdots, E_p' \in \mathscr{E}_0'$，$F_1', F_2', \cdots, F_{p+1}' \in \mathscr{E}' - \mathscr{E}_0'$。在$H$里，对应于$\sigma'$的奇交错列不是极大的，即极大奇交错列的条件，应被破坏。故存在指标$k_1, k_2 \leqslant p+1$，使

$$F_{k_1} \cap F_{k_2} = \{a\}。$$

命G是集族$(E_1, E_2, \cdots, E_p, F_1, F_2, \cdots, F_{p+1})$的代表图，则图$G$是联接的，且存在一个奇圈，$G$的一个极小奇圈在$H$内定义一个形如

$$(aF_{i_1}x_1E_{j_1}y_1F_{i_2}x_2E_{j_2}\cdots F_{i_k}a)$$

的奇圈，但圈中无边，含其上三个点，这与H的平衡性相矛盾

4．命$x_1 \in E_1$，考察超图

$\overline{H} = (\{x_1\}, E_2, E_3, \cdots, E_m) = (\overline{E}_1, \overline{E}_2, \cdots, \overline{E}_m)$，

因$\overline{E}_1 = \{x_1\}$只含一点，$\overline{E}_{i(i\geq 2)} = E_{i(i\geq 2)}$，$\overline{H}$中，没有圈能使用$\overline{E}_1$，故$\overline{H}$的圈只能是$E_2, \cdots, \overline{E}_m$等所组成，故$\overline{H}$里的圈，实际上都是$H$里的圈，$H$既是平衡的，故$\overline{H}$也是平衡的。但

$$\sum_{i\in I} |\overline{E}_i| < \sum_{i\in I} |E_i|,$$

据归纳假设有　$\nu(\overline{H}) = \tau(\overline{H})$，

故　$\nu(\overline{H}) = \tau(\overline{H}) \geqslant \tau(H) > q$。

设$\overline{\mathscr{E}}_0$是$\overline{H}$的一个极大并列集，则因$\nu(\overline{H}) > q = \nu(H)$，必有$\overline{E}_1 \in \overline{\mathscr{E}}_0$，否则$\nu(\overline{H})$将不能大于$\nu(H)$，但$\overline{\mathscr{E}}_0 - \overline{E}_1$全含在$H$内，应是$H$的一个并列集，故$|\overline{\mathscr{E}}_0 - \overline{E}_1| \leqslant \nu(H)$，且$|\overline{\mathscr{E}}_0 - \overline{E}_1| = |\overline{\mathscr{E}}_0| - 1 \geqslant \nu(H)$，即$|\overline{\mathscr{E}}_0 - \overline{E}_1| \geqslant \nu(H)$，故$|\overline{\mathscr{E}}_0 - \overline{E}_1| = \nu(H)$，于是$\overline{\mathscr{E}}_0 - \{\overline{E}_1\}$是$H$的极大并列集，但其合不含$x_1$，这是矛盾。

故若H是平衡的，必有　$\nu(H) = \tau(H)$。

（证毕）

推理14.15：设H是一个平衡超图，秩函数为$r(A)$，则

$$\alpha(H) = \rho(H) = \max_{\substack{A \neq \phi \\ A \subset X}} \left\lceil \frac{|A|}{r(A)} \right\rceil^{*}。$$

证　作H的对超偶图H^*，H^*是平衡的，显有

$$\alpha(H)=\nu(H^*), \qquad \rho(H)=\tau(H^*),$$

据本定理，有 $\nu(H^*)=\tau(H^*)\Rightarrow\alpha(H)=\rho(H)$，

据定理14.13，乃有

$$\alpha(H)=\rho(H)=\max_{\substack{A\neq\phi\\A\subset X}}\left[\frac{A}{r(A)}\right]^*.$$

（证毕）

推理14.15，设H是一个平衡超图，具m边及秩函数$r(A)$，并设$k\leqslant m$，则存在一个k边的复盖，其充分和必要条件是

$$kr(A)-|A|\geqslant 0 \qquad (A\subset X)$$

证 据推理14.15$_a$，有

$$\rho(H)=k=\max_{\substack{A\neq\phi\\A\subset X}}\left[\frac{A}{r(A)}\right]^*$$

$$\Rightarrow k\geqslant\left[\frac{A}{r(A)}\right] \qquad \left(\begin{matrix}A\neq\phi\\A\subset x\end{matrix}\right)$$

或 $$kr(A)\geqslant|A| \qquad \left(\begin{matrix}A\neq\phi\\A\subset x\end{matrix}\right)$$

反之，设此式成立，则

$$\rho(H)\geqslant\frac{|A|}{r(A)}\Rightarrow\rho(H)=\left[\frac{A}{r\cdot A}\right]^*=\alpha(H),$$

$\rho(H)=k$达到极小。

联合定理**14.14**与定理**14.15**，可以推得关于一般单纯图G的一个重要定理：

设已给单纯图$G=(X,E)$，命

$\alpha(G)$表示G的稳固数(G里极大稳固集的维)，

$\theta(G)$表示G里分划X的集团的极少个数，

$\gamma(G)$表示G的着色数，

$\omega(G)$表示G里集团的极大维，

若 $$\alpha(G_A)=\theta(G_A) \qquad (1)$$

对一切子集A均成立$(A\subset X)$，则图G称为是α—**完备的**。

若对一切$A\subset X$，有

$$\gamma(G_A)=\omega(G_A), \qquad (2)$$

则图G称为是γ—完备的。

C. Berge的猜想是(1)⟺(2)，这样的图便称为是完备的，这是有名的完备图的猜想。下定理用超图理论，证实这个猜想，可以说是超图理论中最美丽的部份，不用超图理论也可证实这个猜想，关于后者，本书就不加论述了，

设$G=(X, E)$是一个单纯图，$\mathscr{C}$是其极大集团族，再设$A\subset X$，$\mathscr{D}\subset\mathscr{C}$，命$G_A, \mathscr{D}$是一个图，乃自图$G$中舍去顶$X-A$与$\mathscr{D}$以外的边得来，于是下定理成立：

定理14.16 以下条件是等价的：

(1) $\alpha(G_A, \mathscr{D})=\theta(G_A, \mathscr{D})$对每一$A$与每一$\mathscr{D}$均成立，

(2) $\gamma(G_A, \mathscr{D})=\omega(G_A, \mathscr{D})$对每一$A$与每一$\mathscr{D}$均成立，

(3) 图G里每一奇圈，至少含有这样一边，G里每一极大集团，包含此边的，必含奇圈一个第三点。

证 作超图$H=(X, \mathscr{C})$，取G的极大集团为边，则条件(3)等价于

(3′) H是平衡的。

而(3′)又等价于

(3″) 对偶图H^*是平衡的。

同样，(1)等价于

(1′) $\nu(H')=\tau(H')$对H^*的每一部份子图H'均成立。

(2)等价于

(2′)$\gamma(H')=r(H')$对H的每一部份子图均成立。据定理14.13，(2′)等价于(3′)，据定理14.14，(1′)等价于(3″)，故(1)、(2)、(3)是等价的，亦即(1)与(2)是等价的，(1)是图G的α—完备性，(2)是G的γ—完备性，故图G的α—完备性⟺图G的γ—完备性，这就是Barpe的

猜想。

本定理的直接证明，读者如有兴趣，可参看：

C.Berge：Graphs et Hypergraphs 一书第二版（法文版）的附录。

此外还有所谓正规超图与全单模超图，后者的顶边结合矩阵是全单模(0,1)一矩阵，这种矩阵，在整线性规划里很重要，但一个(0,1)矩阵，怎样才是全单模的，如何加以识别，读者可参看：

(1) P,Camion：Characterization of totally unimodular Matrices.Proc.Ann.Math.Soc.
16(1968)1068—1073

(2) GHouila Houri：Charaterisation des Matrices totalment urimodulaires
C.R.Acad. S.C.Paris 254(1962)1192—1193,

(3) A. J.Hoffmann, J.B.Kruskal：Integral Boundary Point of Convex Polyhedra Ann of Math Studies 38,Priuatou 1956, 223

习　题

1．一超图$H=(X,\mathscr{E})$，$\mathscr{E}=\{E_i/i\in I\}$，如果对一切$J\subset I$，任意$i$，$j\in J$由$E_i\cap E_j\neq\phi$导致$\bigcap_{j\in J}E_j\neq\phi$，则称超图$H$满足赫莱条件。试证明：超图$H$是保形的，当且仅当其对偶$H^*$满足赫莱条件。

2．集合$E=\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$的子集的族（$X_1$，$X_2\cdots$，$X_n$）满足赫莱条件，当且仅当对每个3重组（$e_i$，$e_j$，$e_k$），如果含有其中至少2个顶点的$X_p$的族非空，则它们有非空交。试证明之。

3．设$G=(X,U)$是一个树，$\{A_i|i\in I\}$表示X的子集A_i的族，且G_{A_i}也是一个树，试证明：这个族也满足赫莱条件。

4．如果G是无孤立点的n阶单纯图，则有：$\Omega(G)\leq[\frac{n^2}{4}]$对每个$n$均

成立，且此界是可能最好的。试证明之。

5　超图（$X, \mathscr{E}$）被称为是遗传的，如果由 $A \in \mathscr{E}$，$B \subset A$，$B \neq \phi$ 可得出 $B \in \mathscr{E}$。令 $\mathscr{K}$ 表示 $\mathscr{E}$ 的所有形如：$\{E_{i_1}, E_{i_2}, \cdots, E_{i_n}\}$，其中 $E_{i_1} \subset E_{i_2} \subset \cdots \subset E_{i_n}$ 的 $\mathscr{E}$ 的子集族的集合。试证明：导出超图（$\mathscr{E}, \mathscr{K}$）是染形的。

6．设 $e_1, e_2, \cdots, e_m$ 为在一直线上的点，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为区间，且没有任何一个区间含于另一个区间里面。试证明：$H=(X_1, X_2, \cdots X_n)$ 的对偶超图 H^* 也是一个区间族。又试指出，如何在直线上放置点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 及区间 $E_1, E_2, \cdots, E_m$，使得当且仅当 $x_j \in E_i$ 时有 $e_i \in X_j$。

7　一个单纯图 G 是某个图的极大集团的代表图，当且仅当 G 中存在一个集团的族（$E_i \mid i \in I$），使有：（1）G 的每条边均被一个 E_i 所复盖；（2）族（$E_i \mid i \in I$）满足赫莱条件。试证明之。

8　考查形如 $\{x \mid x=(x^1, x^2, \cdots, x^k) \in N^k;\ a^1 \leq x^1 \leq b^1,\ a^2 \leq x^2 \leq b^2,\ \cdots,\ a^k \leq x^k \leq b^k\}$ 的非空集合的族。试证明：这个族满足赫莱条件。

9　试证明：如果 G 是 K_n 的代表图，则（1）G 有 $\binom{n}{2}$ 个点，（2）G 是 $2(n-2)$ 次正规的，（3）G 的任二个非相邻顶点恰有 4 个公共的邻点，（4）G 的任二相邻点含有恰好（$n-2$）个公共的邻点。

A. Hoffman（1960）曾证明：这些必要条件也是充分的，仅 $n=8$ 时例外。对于 $n=8$，此处存在 3 个图与 $L(K_8)$ 不同，但同时满足这些条件。

10　试证明：如果 G 是 $K_{m,n}$ 的代表图，则（1）G 有 mn 个顶点，（2）G 是 $m+n-2$ 次正规的，（3）任意二个不相邻的顶点恰含有 2 个公共的邻点，（4）在 G 中有 $n\binom{m}{2}$ 对相邻点偶，它们均恰含 $m-2$ 个公共的邻点，又恰有 $m\binom{n}{2}$ 对相邻点偶，它们均恰含（$n-2$）个公共的邻点。

Moon（1963）与Hoffman（1964）曾指出这个必要条件也是充分的，仅仅对 $m=n=4$ 例外，此时存在有图与 $L(K_{4,4})$ 不同，但也满足条件（1）～（4）。这一点是被Shrikhande（1959）所发现的。

11．试证明：一个联结图 G 是一个树的代表图，当且仅当：G 的每个块都是一个集团，而且没有任何三个块含有一个公共顶点。（Ramachandra，Rao 1969）

12．试证明：图 G 是某个图的块的代表图，当且仅当 G 的每个块是一个集团。（Harary，1969）

13　如果X是完全二分图$K_{p,q}$的边集合，$\mathscr{E}$是$K_{p,q}$的圈集合，试证明：$H=(X,\ \mathscr{E})$是一个超图，而且：

$$\nu(H)=\left[\frac{p}{2}\right]\left[\frac{q}{2}\right]，\text{如}pq\text{是偶数，}$$

$$\nu(H)=\left[\frac{p}{2}\right]\left[\frac{q}{2}\right]+\left[\frac{\min\{p,\ q\}}{4}\right]，\text{如}pq\text{为奇数。}$$

(Chartrand, Geller, Hedetniemi 1970)

14　如果H是秩为3的匀称的超图，具n个顶点，且满足$|E_i\cap E_j|\leq 1$ $(i\neq j)$，则每个极大稳定集S满足：$|S|\geq[\sqrt{2n}]$，试证明之。

15　试证明：如果H是秩为$h\geq 3$的匀称超图，且$|E_i\cap E_j|\leq h-2$ $(i\neq j)$，则超图H的稳定数k满足：

$$n-k\leq\binom{k}{h-1}.$$

16．试证明：如H是n阶超图，色数为$\chi(H)$，稳固数为$\beta(H)$，则有，$\chi(H)\beta(H)\geq n$；$\chi(H)+\beta(H)\leq n+1$。

17　试证明：如果超图H的色数为$\chi(H)=q$，则H含一条长为$q-1$的链。

18．试证明：如果$k\geq 2$，$G=(X,\ Y;\ \Gamma)$是一单纯两分图，且$|\Gamma(S)|\geq(k-1)|S|+1$ $(S\subset X,\ S\neq\phi)$，而且G的任一个除G以外的部分图均不再满足此条件，则X中每点的次数均为k。

19　试证明：如$k\geq 2$，$H=(E_i\ |\ i\in I)$是一个超图，且$|\bigcup_{i\in J}E_i|\geq(k-1)|J|+1$，$(J\subset I,\ J\neq\phi)$，则超图$H$含有$k$个两两不相交的径集。

参考书目

〔1〕C Berge: Graphs and Hypergraphs.

〔2〕J A Bondy and U.S.R.Murty: Graph Theory with Applications.

〔3〕F Harary: Graph Theory.

〔4〕B Bollobas: Extremal Graph Theory.

〔5〕L R Ford and D R.Fulkerson: Flows in networks

〔6〕D E JoHnson and J R.JoHnson Graph Theory with Engineering Applications

〔7〕D.Konig: Theorie der Endlichen und unendlichen Graphen.

〔8〕A.Dold and B.Eckmann: Lecture Notes in Mathematics 642. Theory and Applications of Graphs

〔9〕H.J.Ryser: Combinatorial Mathematics

〔10〕M Capobianco, J.C.Molluzzo, Examples and Counterexamples in Graph Theory.

名 词 索 引